**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –**

**CLASA A IX - A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se dau punctele fixe A,B și punctul M exterior dreptei AB. Să se arate că rezultanta vectorilor $2\,\overrightarrow{MA}$ și $5\overrightarrow{MB}$ trece printr-un punct fix .

2. Numerele reale strict pozitive verifică relațiile: $a = mx, b = ny, c = pz$. Arătați că dacă tripletele $a,b,c$ și $x,y,z$ sunt progresii geometrice, iar tripletul $m,n,p$ este progresie aritmetică, atunci $m = n = p$ .

3. Arătați că,dacă $a,b,c$ sunt lungimile laturilor unui triunghi,atunci:
$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2$$

4. Arătați că pentru orice număr natural nenul, numărul $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$ se divide cu 9.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –**

**CLASA A X - A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se dau numerele: $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}},\ y = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

   a) Să se determine $a \in \boldsymbol{Q}$ astfel încât $x = a + \sqrt{2}$.
   b) Să se arate ca $x + y \in \boldsymbol{N}$.

2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ astfel încât $z_2 + z_3 \neq 0$ și $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$.

Să se calculeze valoarea expresiei $\frac{z_1}{z_2+z_3}$.

3. Se consideră inegalitatea: $\log_{\frac{a}{a+1}}(2 + x^2) > 1,\ a \in \boldsymbol{R}$.

   a) Rezolvați inecuația care se obține pentru $a = -3$.
   b) Determinați $a \in \boldsymbol{R}$ pentru care inegalitatea data este adevarată pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$.

4. Să se rezolve ecuația: $(\log_5 x) \cdot \log_4(27 - x) = 1$.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

**– ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –**

**CLASA A XI - A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\Re)$ cu $det(A) = Tr(A) = 1$. Să se arate că are loc relația $\sum_{k=1}^{n} det(A^2 + kI_2) = \frac{n(n^2+2)}{3}$, unde $n \in N, n \geq 2$.

2. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\Re)$ cu $A^2 = A^3$ și $A + B = I_n$. Să se arate că matricea $I_n + AB$ este inversabilă.

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{n+1}$, $n \geq 1$

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ .

4. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0}(\cos x \cos 2x \ldots \cos nx)^{\frac{1}{n^3 \sin^2 x}}\right)$

# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

## – ETAPA LOCALĂ 22.02.2019 –

## CLASA A XII - A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Fie $G$ un grup și $a, b \in G$ astfel încât $a^3 = b^4 = e$ și $ba = ab^3$. Demonstrați că
   i) $b^2 a = ab^3$
   ii) $b^3 a = ab$
   iii) $b^{-1}a^{-1}b^{-1} = a^2$

2. Se consideră mulțimile $M = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z},\ m, n \ impare \right\}$ și $G = M \times \mathbb{Z}$. Pe mulțimea $G$ se definește legea de compoziție $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2)$, $\forall x_1, x_2 \in M$ și $\forall y_1, y_2 \in Z$.
   i) Calculați $(1,1) * (1,2) * \ldots * (1,2018)$
   ii) Demonstrați că $(G, *)$ este un grup abelian
   iii) Arătați că funcția $f : G \to \mathbb{Q}^*$, $f(x, y) = x \cdot 2018^y$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

3. Să se determine funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu $f(1) = 0$ și care admite o primitivă $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(xy) + xy = xy\big(f(x) + f(y)\big)$ oricare ar fi $x, y \in (0, \infty)$.

4. Să se calculeze integrala $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{e^x + 1} dx$.