INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARAD

Concursul Naţional de Matematică Aplicată

„Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a IX-a

1. **a)** Aflați primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că
$$\begin{cases} a_2 + a_5 - a_8 = 10 \\ a_1 + a_6 = 17 \end{cases}$$

b) Calculați $2+4+6+\ldots+2020$;

c) Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Să se demonstreze că $4a_{10} - 6a_8 + 2a_4 = 0$.

2 **a)** În clasa 9A a unui liceu cu profil sportiv există 8 băieți. În câte moduri poate participa clasa 9A la alcătuirea echipei de fotbal a școlii știind că vor fi selecționați elevi din toată școala?

b) Aflați numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in Z \mid |3x+4|< 8\}$.

3. Considerăm propoziția P(n): „$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$”, $n\in N^*$

a) Verificați dacă propoziția P(3) este adevărată;

b) Demonstrați că propoziția P(n) este adevărată pentru orice număr natural $n\geq 1$;

c) Calculați $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2018\cdot 2019}$.

4. **a)** Să se determine primul termen și rația unei progresii geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că

$$\begin{cases} a_2 + a_5 - a_4 = 10 \\ a_3 + a_6 - a_5 = 20 \end{cases}$$

b) Să se determine numărul $n\in N$ pentru care are loc egalitatea

$$2^3+2^2+2+\ldots+2^{3-n}=\frac{127}{8};$$

c) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu rația 2. Dacă termenilor a_1, a_4 și a_6 li se adaugă 18, 34, respectiv 16, numerele obținute sunt în progresie aritmetică. Să se determine a_1.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.

- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată

„Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

Clasa a IX-a

1. a) Aflați primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că

$$\begin{cases} a_1^2 + a_4^2 = 101 \\ a_2 + a_6 = 20 \end{cases}$$

b) Calculați suma $S_n=3+7+11+\ldots+(4n-1)$, $n\in N^*$

c) Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Să se demonstreze că $a_m(n-p)+a_n(p-m)+a_p(m-n)=0$, $\forall m,n,p\in N^*$.

2. **a)** În clasa 9A a unui liceu cu profil sportiv există 10 băieți. În câte moduri poate participa clasa 9A la alcătuirea echipei de fotbal a școlii știind că vor fi selecționați elevi din toată școala?

b) Aflați numărul elementelor mulțimii $A=\left\{x \in Z \mid x = \frac{6n-7}{2n+1}, n \in Z\right\}$.

3. a) Arătați că numărul $\underbrace{999\ldots9}_{n \text{ cifre}}88\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ cifre}}36$ este pătrat perfect , $\forall n\in N^*$;

b) Calculați suma $3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n \text{ cifre}}$;

c) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere pozitive în progresie geometrică, să se arate că $(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)^2=(a_1 \cdot a_n)^n$.

4. a) Demonstrați egalitatea $1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 +\ldots+(n-1)\cdot n^2 =\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, $\forall n\geq 2$;

b) Demonstrați că pentru orice număr natural n, numărul $13^n + 7^n - 2$ se divide cu 6;

c) Demonstrați că pentru orice număr natural n și orice număr $x\in(-1, \infty)$ are loc inegalitatea $(1+x)^n\geq 1+nx$ (inegalitatea lui Bernoulli).

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.

- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată

„Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră tehnologică: profil tehnic

Clasa a IX-a

1. a) Aflați primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că
$$\begin{cases} a_4 + a_8 = 30 \\ 10a_1 - 4a_7 = -45 \end{cases}$$
b) Calculați $1+2+3+\ldots+2019$;
c) Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Să se demonstreze că $2a_5 - 4a_3 + 2a_1 = 0$.

2. a) În clasa 9A a unui liceu cu profil sportiv există 7 băieți. În câte moduri poate participa clasa 9A la alcătuirea echipei de fotbal a școlii știind că vor fi selecționați elevi din toată școala?
b) Aflați numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in N \mid |2x-1| \leq 4\}$.

3. Considerăm propoziția P(n): $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots\ldots+n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n\in N^*$

a) Verificați dacă propoziția P(3) este adevărată;

b) Demonstrați că propoziția P(n) este adevărată pentru orice număr natural $n\geq 1$;

c) Calculați $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots\ldots+2018\cdot 2019$.

4. a) Să se determine primul termen și rația unei progresii geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 14 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 28 \end{cases}$$

b) Să se determine numărul $n\in N$ pentru care are loc egalitatea

$1+2+4+8+\ldots+2^{n+1}= 131071$;

c) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu rația 2. Dacă termenilor a_1, a_4 și a_6 li se adaugă 18, 34, respectiv 16, numerele obținute sunt în progresie aritmetică. Să se determine a_1.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.

- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată

„Adolf Haimovici"

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră teoretică: profil uman - filologie şi ştiinţe sociale

Clasa a IX-a

1. **a)** Aflați primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că
$\begin{cases} a_2 + a_6 + a_9 = 45 \\ a_3 + a_7 + a_{10} = 54 \end{cases}$
b) Calculați $1+3+5+\ldots+2019$;
c) Considerăm progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$. Să se demonstreze că $2a_7 - 4a_5 + 2a_3 = 0$.

2. Se consideră mulțimile $A=\{x \in R \mid |3x-1| \leq 10\}$ și $B=\left\{x \in R \middle| -3 < \frac{3x+1}{2} < 4\right\}$
a) Scrieți mulțimea A sub formă de interval;
b) Scrieți mulțimea B sub formă de interval;
c) Aflați produsul elementelor mulțimii $(A \setminus B) \cap Z$

3. **a)** Care este mulțimea de adevăr a predicatului p(x): „$|x^2-4|+|2-x|=0, x\in R$" ?
b) Aflați valoarea de adevăr a propoziției p: „$\exists x \in Z,\ \frac{6x+3}{3x+5} \in Z$"

4. **a)** Să se determine primul termen și rația unei progresii geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că
$\begin{cases} a_5 - a_1 = 30 \\ a_4 - a_2 = 12 \end{cases}$
b) Să se determine numărul $x\in R$ pentru care numerele $x-6$, $2x-8$, $5x+1$ sunt în progresie geometrică;
c) O tribună a unui stadion se compune din 20 de rânduri și fiecare rând, începând cu al doilea, are cu 16 locuri mai mult decât rândul precedent. În ultimul rând sunt 404 locuri. Câți spectatori încap în tribună?

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.
- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.
- Timp de lucru: 3 ore.

Concurs Național de Matematică Aplicată

“ Adolf Haimovici”

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale și protecția mediului

Etapa pe centru – 22.02.2019

Clasa a X-a

1. Se consideră numerele a=$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ și b=$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

   a) Să se calculeze $a^2 - b^2$ și a·b.

   b) Să se raționalizeze fracția $\frac{1}{a+b}$.

   c) Să se determine $(a+bi)^{36}$, $i^2 = -1$.

2. a) Să se arate că $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lg 7}+\frac{1}{\log_6 7}+\frac{1}{\log_{15} 7}\right)=\frac{1}{\log_2 7}+\frac{1}{\log_3 7}+\frac{1}{\log_5 7}$;

   b) Să se determine x $\in R$ pentru care este definita expresia E(x) = $\log_{x-2}\sqrt{x^2-5x+4}$

   c) Să se arate că următoarea expresie nu depinde de x $\in (0. +\infty)$

$$E=\frac{4\left(\log_2 x^3\right)^2+2\log_2 8x^{-6}-(1-6\log_2 x)^2}{2-8\sqrt{x}+(\sqrt{x}+2)^2-(\sqrt{x}-2)^2}$$

3. a) Dacă a=$\log_{125} 5-\sqrt[3]{\frac{1}{27}}+\left(2-\sqrt{5}\right)^2+\left(2+\sqrt{5}\right)^2$ și b=$\frac{1}{\log_4 3}$, arătați că a+$\sqrt{9^b} \in N$

   b) Să se determine $[\sqrt{50}]$, $[\sqrt[3]{65}+2]$ și $[2\cdot\log_7 9-1]$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului x.

4. a) Să se determine z $\in C$ știind că $z^2 = 3-4i$.

   b) Știind că z^2+z+1=0 să se determine $\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)^{2019}$

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.
- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu
- Timp de lucru: 3 ore

Concurs Național de Matematică Aplicată

" Adolf Haimovici"

Filieră teoretică: profil real - științe ale naturii

Etapa pe centru – 22.02.2019

Clasa a X-a

1. a) Se dau numerele $x=7+5\sqrt{2}$ și $y=7-5\sqrt{2}$
Să se arate că $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2$;
b) Demonstrați că numărul $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} \in \mathbf{Q}$.

2 a) Aflați $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $\sqrt{\frac{1}{1\cdot 18}+\frac{1}{2\cdot 27}+\ldots+\frac{1}{n(9n+9)}}=\sqrt{\frac{10}{91}}$;

b) Să se determine $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale știind că :

$$\sqrt{a_1-2}+\sqrt{a_2-4}+\sqrt{a_3-6}+\ldots+\sqrt{a_n-2n}=\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{2}-\frac{n^2}{2},\ n\geq 1.$$

3. a) Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$ astfel încât $z_1+z_2+z_3 \neq 0$, $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$ și $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Să se arate că $|z_1+z_2+z_3|=2$.

b) Dacă $z_k \in \mathbf{C}$ sunt soluțiile ecuației $|z|^2+\bar{z}=1-i$ să se calculeze z_k^{8n} , $n \geq 1$, $k \in \{1,2\}$.

4. a) Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mare:

$A=\log_5 \sqrt{20}$ sau $B=\log_{80} 64$

b) Pentru 1<b<a să se calculeze:

$$n=\left(\sqrt{\log_a \sqrt{ab}+\log_b \sqrt{ab}}-\sqrt{\log_a \sqrt{\frac{b}{a}}+\log_b \sqrt{\frac{a}{b}}}\right)\sqrt{2\log_a b}\ .$$

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu

- Timp de lucru: 3 ore.

Concurs Național de Matematică Aplicată

" Adolf Haimovici"

Filieră tehnologică: profil tehnic

Etapa pe centru – 22.02.2019

Clasa a X-a

1. Se consideră expresia $E(x)=\log_{3-x}(3+x)$

   a) Determinaţi mulţimea D pe care este definită expresia E(x).

   b) Arătaţi că $E(a)\cdot E(-a)=1$, $\forall a \in D-\{-2\}$

   c) Determinați $E(\sqrt{8})$.

2. Se consideră ecuația $x^2-4x+5=0$.

   a) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația.

   b) Să se formeze ecuația de gradul al II-lea cu soluțiile $y_1=\frac{x_1}{x_2}$ și $y_2=\frac{x_2}{x_1}$ unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației de mai sus.

   c) Să se determine $z \in C$ dacă $|z|=|z-2|=|\bar{z}+4i|$

3. a) Știind că $14^{2a}=2$ și $14^{b}=7$ să se calculeze $25^{\frac{1-b-2a}{2-2a}}$.

   b) Dacă $\log_2 3=a$ și $\log_3 5=b$ calculați în funcție de a și b numărul $\log_6 450$

4 a) Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mare:

$n=2^{3^2}-2^{2^3}$, $m=\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{2^{18}}$

b) Arătați că: $\frac{1}{\log_a n}+\frac{1}{\log_{a^2} n}+\frac{1}{\log_{a^3} n}+\frac{1}{\log_{a^4} n}=10\log_n a$, $a>0$, $a\neq 1$, $n>1$

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu

- Timp de lucru: 3 ore.

Concurs Național de Matematică Aplicată

“ Adolf Haimovici”

Filieră teoretică: profil uman-filologie și științe sociale

Etapa pe centru – 22.02.2019

Clasa a X-a

1. a) Arătați că $N \in Q$ unde

$N = \log_{11}\sqrt[3]{121} + \log_7\sqrt{9+\sqrt{32}} + \log_7\sqrt{5+\sqrt{16+\sqrt{32}}} + \log_7\sqrt{5-\sqrt{16+\sqrt{32}}}.$

b) Dacă a,b,c $\in (0,+\infty)$ arătați că:

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^{\lg\frac{b}{c}}\left(\frac{ac}{b}\right)^{\lg\frac{c}{a}}\left(\frac{ab}{c}\right)^{\lg\frac{a}{b}} = 1$$

2. a) Se dă $\log_{30} 3 = k$ și $\log_{30} 5 = n$. Se cere $\log_{30} 8$.

b) Să se arate că dacă $a^2 + b^2 = 7ab$ (a> $b > 0)$ atunci și

$\ln\frac{1}{3}(a+b) = \ln\frac{1}{\sqrt{5}}(a-b) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$

3. a) Arătați că $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ n $\in$N, n≥ 1.

b) Să se calculeze suma $S = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}(\sqrt{2}+1)} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)\cdot n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$.

c) Să se calculeze produsul $P = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{128} 127$

4. a) Să se calculeze: $E = \frac{1}{\log_a n} + \frac{1}{\log_{a^2} n} + \frac{1}{\log_{a^3} n} + \frac{1}{\log_{a^4} n} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^{99}} n}$, a,n $\in (0,+\infty)-\{1\}$.

b) Să se aducă la forma mai simplă $E(x,y) = \frac{x - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \neq y$.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu

- Timp de lucru: 3 ore

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a XI –a

1. a) Să se rezolve ecuația matriceală $X^3 - X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; X \in M_2(\mathbb{Q})$

b) Să se afle $x \in \mathbb{R}$, stiind că $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

2. Fie punctele $A(3,2)$ și $B(2,4)$.

a) Să se determine ecuația dreptei AB.

b) Să se afle distanța de la punctul O la dreapta AB.

c) Să se determine un punct M care aparține dreptei de ecuație $x - y - 3 = 0$ și $A_{OAM} = A_{OBM}$

3.Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 2019}\frac{\sin(x-2019)}{x^2-2020x+2019}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(2019^{\frac{1}{x+1}} - 1\right)$

4. a) Să se afle asimptotele funcției $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$.

b) Să se afle parametri reali a și b, știind că functța $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^{bx}\cdot 3^{ax}, x \prec 1 \\ 12, x = 1 \\ 3^{bx-1}\cdot 2^{ax+1}, x \succ 1 \end{cases}$

este continuă pe $\mathbb{R}$.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu
- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

Clasa a XI –a

1. Să se rezolve ecuația matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}; X \in M_2(\mathbb{R})$

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ și punctele $P_k(a_k, b_k)$, $k \in \{1,2,3\}$. Dacă $B = A \cdot A^T$ și $C = \frac{1}{14}B$, se cere:
   a) Să se determine B și C^{2019} dacă $P_1(1,2), P_2(2,4), P_3(-3,-6)$
   b) Să se arate că $\det(B) \geq 0$
   c) Să se arate că $\det(B) = 0$ dacă și numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 aparțin unei drepte ce trece prin origine.

3. Să se calculeze următoarele limite:
   a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x + x^2) + \ln(1 + x + x^2)}{x^2}$
   b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$
   c) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$

4. a) Să se afle $a, b \in \mathbb{R}$, știind că $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + a} - b}{x^2 + x - 2} = \frac{5}{18}$

   b) Să se afle $a, b \in \mathbb{R}$, știind că graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ are asimptotă dreapta de ecuație $y = x + 1$.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.
- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu
- Timp de lucru: 3 ore

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici"

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră tehnologică: profil tehnic

Clasa a XI-a

1.a) Să se rezolve ecuația matriceală $X^3 + X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; X \in M_2(\mathbb{Z})$

b) Să se afle $x \in \mathbb{R}$, știind că $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$

2. Fie punctele $A(2,2)$, $B(5,1)$ și $C(a,b)$.

a) Să se determine ecuația dreptei AB.

b) Să se determine coordonatele punctului C, știind că este situat pe dreapta de ecuație $x - 2y + 8 = 0$ și că $A_{ABC} = 7$

c)Calculați distanta de la C la dreapta AB.

3.Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2019^x - 2018^x}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} - 1\right)$

4.Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^{ax} + 4^{bx} - 4, x \le 1 \\ ax^3 + bx^2 - (7a + 3b)(x - 1), x \in (1,2) \\ 2^{bx} + 4^{ax} - 18, x \ge 2 \end{cases}$

a) Să se afle parametri reali a și b, știind că funcția dată este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $a = b = 1$, să se afle $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu

- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră teoretică: profil umanist- ştiinţe sociale

Clasa a XI-a

1. a) S-au amestecat 3kg de cafea cu prețul de 24lei/kg cu 5kg de cafea cu prețul de 18lei/kg și cu 8kg de cafea cu prețul de 21lei/kg. Care va fi prețul mediu de vânzare al unui kg de amestec?

   b)Ce preț are un sortiment de cafea dacă un kg de amestec format din 20 kg din acest sortiment și 5kg de cafea din alt sortiment cu prețul de 20lei/kg, costă 23lei?

2. 40 de elevi au fost în vacanță la munte și la mare. 15 elevi au fost numai la munte, iar 18 elevi au fost numai la mare.

   a) Câți elevi au fost atât la munte cât și la mare?

   b) Să se întocmească un tabel care să conțină destinația, frecvența absolută, frecvența relativă și frecvența cumulată.

   c) Să se exprime în procente rezultatele acestei statistici și sub formă de sectoare de cerc, precizându-se măsura în grade a unghiurilor la centru.

3. O editură pune în vânzare prin 9 librării loturi egale de cărți. Timpul de epuizare a acestor loturi este redat în următorul tabel

Librăria	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Număr de zile	49	50	48	50	51	54	49	50	49

   a) Să se determine durata medie de epuizare a loturilor de cărți.
   b) Să se calculeze dispersia și abaterea medie pătratică.

4. La un test s-au obținut următoarele note: 6,10,9,8,5,2,3,5,10,8,7,7,4,5,6,8,9,7,6,9,8,7,4,7,6.
   a) Să se întocmească un tabel care să reprezinte seria statistică.
   b) Să se precizeze mediana și modulul seriei statistice, iar apoi să se calculeze media la test. Cât la sută din numărul de elevi au note peste 7?
   c) Se cere reprezentarea în batoane și poligonul frecvențelor.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu

- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată

„Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a XII-a

1. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziție $x\circ y=2x+2y-4$ și $x*y=(x-2)(y-2)+4$.

a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=x*x$;

b) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea $x*a=4,\ \forall x\in\mathbb{Z}$;

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x\circ(y+1)=6 \\ (x-y)*1=4 \end{cases}$, $x,y\in\mathbb{Z}$.

2. Folosind o permutare circulară pe literele alfabetului latin cu o cheie $k\in[0,25]$, în mulțimea $\mathbb{Z}_{26}$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

se obține o tehnică de criptare.

Pentru criptarea mesajului este folosită o funcție bijectivă $e_k(a)=(a+k)\bmod 26$, unde k reprezintă cheia de criptare, iar a numărul corespunzător literei din mesajul care va fi criptat.

a) Criptați textul „HAIMOVICI”, pentru k=12;

b) Decriptați textul „EGOOQE”, pentru k=12.

3. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n e^x,\ n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $\int(f_0(x)+f_1(x))dx$;

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f_3 are un singur punct de extrem;

c) Să se demonstreze că primitivele funcției f_{2019} sunt concave pe intervalul $(-\infty,-2019]$.

4. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x>1 \\ \frac{x-1}{x}, & 0<x\le 1 \end{cases}$

a) Să se arate că funcția admite primitive pe $(0,+\infty)$;

b) Fie funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$. Determinați primitiva funcției g a cărui grafic conține punctul A(1,2) ;

c) Calculați $\int f^2(\sqrt{x})dx,\ x>1$.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.

- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată

„Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră teoretică: profil real-ştiinţe ale naturii

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
$x * y = xy - (x+y)\sqrt{2019} + 2019 + \sqrt{2019}$.

a) Determinați elementul neutru al legii ;

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$;

c) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ astfel încât $a * b \in \mathbb{Z}$ **.**

2. Se consideră legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3$;

b) Știind că $x_0 \in \mathbb{Q}$ și $x_n = x_0 * x_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că $x_7 \in \mathbb{Q}$;

c) Să se arate că $(\mathbb{R}, *)$ este un grup izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

3. Fie funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^{2019} + 1}$.

a) Să se calculeze $\int \frac{f(x)}{x} dx$;

b) Arătaţi că $F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) \le F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$, unde F este o primitivă a lui f;

c) Să se determine $\int \frac{f''(x) f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} dx$ **.**

4. Să se arate că dacă funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfac relațiile $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $F(x) \cdot F(1-x) = F(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci F nu este o primitivă a lui f.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.

- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată

„Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră tehnologică: profil tehnic

Clasa a XII-a

1. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy + 6x + 6y + 15$.

a) Să se arate că există $p \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * y = 2(x+3)(y+3) + p,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) Să se determine elemental neutru al legii ;

c) Să se arate că $\sqrt[3]{-100} * \sqrt[3]{-99} * \ldots * \sqrt[3]{100} < -1$.

2. Se consideră mulțimea H a matricelor de forma $X(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $I_2 \in H$;

b) Să se arate că $X(a)X(b) = X(a+b),\ \forall X(a), X(b) \in H$;

c) Să se demonstreze că $\forall X(a) \in H, \exists X(c) \in H$ astfel încât $X(a)X(c) = \mathrm{I}_2$.

3. Fie funcţia $\mathrm{f}: \Re \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 4x$.

a) Să se determine primitiva F a funcției f, care verifică relația $F(-1) = 5$;

b) Să se calculeze $\int \frac{f(x)}{x^4 - 2x^2 + 2019} dx$;

c) Dacă F este o primitivă a lui f , să se demonstreze că $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. Se consideră funcțiile $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$ și

$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},\ \mathrm{g}(x) = e^x + x - \ln x$

a) Să se arate că funcția g este o primitivă a funcției f;

b) Să se calculeze $\int f(x)\mathrm{g}(x) dx$;

c) Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.

- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Naţional de Matematică Aplicată

„Adolf Haimovici”

Etapa pe centru – 22.02.2019

Filieră teoretică: profil uman - ştiinţe sociale

Clasa a XII-a

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathrm{I}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $AB=BA$;

b) Să se verifice că $A^2 = 4(A - I_2)$, unde $A^2 = A \cdot A$;

c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care are loc relația $A^3 - aA^2 + 4A = O_2$.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{N})$.

Pe fiecare linie și pe fiecare coloană sunt exact 2 elemente numere pare și doua elemente numere impare. Știind că elementele a_{11}, a_{13}, a_{23} sunt pare, iar elementul a_{34} este impar, să se arate că $a_{21} + a_{42}$ este un număr impar.

3. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și

$$M_x = \frac{x}{3}A + \frac{1}{3x^2}B,\ x \in \mathbb{R}^*,\ A, B, M_x \in M_3(\mathbb{R})$$

a) Să se calculeze $AB-BA$;

b) Să se arate că $M_x \cdot M_y = M_{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

4. În mulţimea $M_2(R)$ se consideră $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^3, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

b) Să se calculeze suma $X(1) + X(2) + X(3) + \ldots + X(2019)$.

c) Să se verifice dacă $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Notă: - Fiecare problemă este obligatorie.

- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu.

- Timp de lucru: 3 ore.