OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
11.02.2023

CLASA a IX - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$3\{x\}^2 + 11\{x\} = 7x - 5.$$

Prin $\{x\}$ am notat partea fracționară a numărului real x.

2. a) Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive a, b, c care loc inegalitatea

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

b) Aflați numerele reale pozitive a, b, c, x, y, z cu $a + b + c = x + y + z = 3$ și

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{yz\sqrt{x}}{xy+z} + \frac{zx\sqrt{y}}{yz+x} + \frac{xy\sqrt{z}}{zx+y}.$$

3. a) Fie $x \in \mathbb{R}^*$astfel încât $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Demonstrați că $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Demonstrați că $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural n.

4. În patrulaterul convex $ABCD$ se consideră punctele $E \in (BC), F \in (AD), G \in (AB)$, $H \in (DC)$ astfel încât $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD} = \alpha$ și $\frac{AG}{GB} = \frac{DH}{HC} = \beta$. Se notează $\{M\} = EF \cap GH$. Să se arate că $\frac{GM}{MH} = \alpha$ și $\frac{FM}{ME} = \beta$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
11.02.2023

CLASA a X - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Să se arate că:

a) Numărul $\sqrt[3]{3}$ este irațional.

b) $\sqrt[3]{9+\frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}}+\sqrt[3]{9-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{71}{3}}}=1$.

2. Fie $a,\ b,\ c\in(0,1)$. Arătați că:

a) $\frac{4bc}{(a+b)(a+c)}\le\frac{\sqrt{bc}}{a}$;

b) $\log_a\frac{4bc}{(a+b)(a+c)}+\log_b\frac{4ac}{(a+b)(b+c)}+\log_c\frac{4ba}{(a+c)(b+c)}=0$ dacă și numai dacă $a=b=c$.

3. Fie $z_1,\ z_2,\ z_3$ numere complexe distincte, astfel încât $z_1+z_2+z_3=z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1=0$.

a) Demonstrați că $z_1^{\ 2}=z_2\cdot z_3$.

b) Demonstrați că $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.

c) Demonstrați că $z_1,\ z_2,\ z_3$ sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

4. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f\left(x^2+y\cdot f(y)\right)=x\cdot f(x)+y^2,\quad \text{pentru orice } x,y\in\mathbb{R}.$$

Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257 / 28 00 08, Fax 0257 / 21 47 46,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
-ETAPA LOCALĂ-
11.02.2023

Clasa a XI - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât urma matricei Tr (A) =1. Să se arate că:

$$\det(A^2 + 5A + 5I_2) = \det(A^2 + A - 9I_2) - 8.$$

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât

$a_1 = 1$ şi $\frac{(n+1)^3}{a_n^2} - \frac{n^3}{a_{n+1}^2} = n^2(n+1)^2$, pentru orice n ∈ ℕ .

Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}a_{2k}$$

Observație: Se poate folosi fără demonstrație faptul că șirul

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

este convergent.

4. Calculați limita $L=\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)\ldots(1-\cos^n x)}{\sin^{2n}x+\ln(1+x^{2n})+\sqrt[n]{1+x^{2n}}-1}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
11.02.2023

CLASA a XII- a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. a) Fie (G, $\cdot$) un grup și $a, b \in$ G astfel încât $a = b^2$ și $b = a^2$. Să se arate că dacă $x = aba$, atunci $x^3 = e$.

b) Se consideră un grup (G, $\cdot$) cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$ astfel încât $(x \cdot y)^m = (y \cdot x)^m$ și $(x \cdot y)^n = (y \cdot x)^n$, $(\forall)$ $x, y \in$ G. Să se arate că G este grup comutativ.

2. Pe mulțimea M = $(0, +\infty)$ se consideră o lege de compoziție „ $*$ “ care are următoarele proprietăți:

i) $(x * y) \cdot (x * z) = x * (y + z)$; $(\forall)$ $x, y, z \in M$

ii) $x * 1 = x$; $(\forall)$ $x \in$ M

Arătați că:

a) $2 * 4 \in \mathbb{Q}$

b) $4 * \frac{1}{4} \notin \mathbb{Q}$

c) $\sqrt{2022} * 2022 = 2022^{1011}$

3. Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, primitivabile, care verifică relația:

$F(x) + \ln f(x) = \ln(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$,

unde $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f și $F(0)=0$.

4. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \int_0^x t\, sin2t\, dt$, respectiv $g(x) = \int_0^{cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, dt$.

a) Demonstrați că funcția g este descrescătoare.

b) Arătați că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$, pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.