OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
11.02.2023

CLASA a V - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 2 ore

1. Restul obținut prin împărțirea numărului natural x la 30 este 8, iar restul obținut prin împărțirea numărului natural y la 35 este 34. Aflați restul împărțirii numărului $3 \cdot x + 2 \cdot y$ la 10.

2. a) Determinați x din egalitatea:

$$x + [1^5 + (5^3)^{10} : 125 + (5^2)^9 - (5^9)^3 - 125^6] \cdot 2001 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2001.$$

b) Festivalul internațional *George Enescu* a fost inițiat în anul $\overline{abcd}$. Ştiind că $\overline{abcd}$ are cifra unităţilor egală cu 8, iar dacă ştergem această cifră numărul se micşorează cu $11011100011_{(2)}$, aflaţi anul iniţierii acestui festival.

3. Determinați ultima cifră a numărului

$$4^{(a_1+a_2)\cdot(a_2+a_3)\cdot(a_3+a_4)\cdot\ldots\cdot(a_{2019}+a_1)} - 1$$

unde $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots ,\ a_{2019}$ sunt numere naturale nenule.

4. Determinați numerele $\overline{abcd}$ care verifică simultan condițiile:

a) $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ sunt numere pare consecutive;

b) $\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right) \cdot 10 = \overline{ab} \cdot \left(\overline{cd} - 1\right)$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
11.02.2023

CLASA a VI- a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 2 ore.

1. Barbu şi colegii de la cercul de matematică aranjează cărțile din cabinetul de matematică. El observă că, dacă le aranjează câte *6* sau câte *7* sau câte *8* sau câte *9* pe fiecare raft, de fiecare dată, rămân nearanjate, acelaşi număr de cărți. Aflați numărul total al cărților ştiind că acesta are trei cifre şi este divizibil cu *11*.

2. Determinați numerele prime a, b, c și d pentru care $23a^3+22b^2+32c+20d=2023$.

3. Fie punctul B situat în interiorul unghiului AOC. Dacă semidreptele OD, OE și OP sunt bisectoarele unghiurilor AOB, AOC, respectiv BOC, arătați că:

a) Măsura unghiului BOC este dublul măsurii unghiului EOD.

b) Măsura unghiului POE este jumătate din măsura unghiului AOB.

c) Unghiurile POE și COD au aceeași bisectoare.

4. Se dau punctele A, B, C și D, coliniare, în această ordine.
Știind că $BC = 3\cdot AB$, $CD = 2\cdot BC$, punctele M și N sunt mijloacele lui AC, respectiv AD, iar $MN = 15$ cm, aflați lungimile segmentelor AB, BC, CD.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
11.02.2023

CLASA a VII - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. a) Determinați numărul elementelor mulțimii $M = \{x \in \mathbb{Z} / |x^3| < 2023\}$.

b) Demonstrați că $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{15\ cifre}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. În triunghiul ascuțitunghic ABC, $\sphericalangle A = 60°$, se consideră $BD \perp AC, D \in AC$, respectiv $CE \perp AB, E \in AB$ și M mijlocul laturii BC. Demonstrați că triunghiul DEM este echilateral.

3. Fie G centrul de greutate al triunghiului oarecare ABC, E simetricul punctului G față de dreapta BC, F mijlocul segmentului AE, $\{H\} = GE \cap BC$ și D mijlocul laturii BC.

a) Arătați că G, D, H, F sunt vârfurile unui paralelogram.

b) Calculați aria triunghiului FGE în funcție de x, unde x este aria paralelogramului de la punctul a).

4. Determinați numerele raționale pozitive x și y, știind că media lor aritmetică este $m_a = \sqrt{x^2 - 16y^2}$, iar media lor armonică este $m_h = \frac{7}{9}$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
11.02.2023

CLASA a VIII - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. a) Se consideră expresia $E\left(x\right)=\left(x^2-5x+3\right)\cdot\left(x^2-5x+9\right)+9$. Arătați că expresia *E(x)* este pătrat perfect.

b) Se consideră expresia $A(x,y)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{y^2-6y+10}$, unde x și y sunt numere reale. Determinați valoarea minimă a expresiei $A(x, y)$.

2. Fie *ABCA'B'C'* o prismă triunghiulară și punctele *M, N, P* intersecția diagonalelor fețelor laterale *ABB'A', BCC'B'*, respectiv *ACC'A'*. Se cere:

a) Demonstrați că planele (*MNP*) și (*ABC*) sunt paralele și calculați raportul ariilor triunghiurilor *MNP* și *ABC*.

b) Calculați raportul dintre aria secțiunii determinată de planul (*MNP*) în prisma dată și aria triunghiului *ABC*.

3. Se consideră tetraedrul *ABCD* în care $AB\perp CD$. Fie M mijlocul muchiei (*BC*) și *N* mijlocul muchiei (*BD*). Pe semidreapta (*DM* se alege punctul *E*, astfel încât $DE=2\cdot DM$, iar pe semidreapta (*CN* se alege punctul *F* astfel încât $CF=2\cdot CN$.

a) Demonstrați că punctele *F, B* și E sunt coliniare.

b) Demonstrați că triunghiul *AEF* este isoscel.

4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$\left[\dfrac{4x^2+3x+14}{x^2+2}\right]+\left\{\dfrac{3x^2+3x+12}{x^2+2}\right\}=6$, unde notația $\left[x\right]$ reprezintă partea întreagă a lui x, iar notația $\left\{x\right\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.