INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: *inf_arad@isjarad.ro*

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018–

CLASA a IX-a
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Demonstrați că $(1+x)^n+\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$,$(\forall)x>0$ și $n \in N$

Soluție:

$(x+1)^n+\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2\sqrt{(x+1)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}$ 2p

$(x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)=2+x+\frac{1}{x} \geq 4$ 2p

$(x+1)^n+\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geq 2\sqrt{4^n}=2^{n+1}$.. 2p

Avem egalitate pt. $x=\frac{1}{x}$, adică pt. $x=1$ 1p

Subiectul 2. Fie $r \geq 0$. Pentru orice numere reale a și b definim mulțimea
$I(a,b)=\{x \in R|\ |x-a|+|x-b| \leq r\}$.
a) Dacă $r<|a-b|$, demonstrați că $I(a,b)=\emptyset$;
b) Dacă $r \geq |a-b|>0$, demonstrați că $I(a,b)$ este un interval închis și mărginit de lungime r.

Soluție:

a) Pres. că $(\exists)x \in I(a,b)$. Conform ip. $|x-a|+|x-b|<|a-b|$ 1p

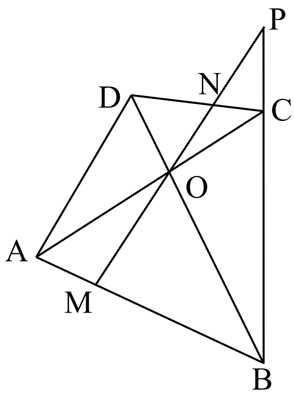
Dar $|x-a|+|x-b| \geq |(x-b)-(x-a)|=|a-b|$ contradicție...............................2p

b) Din ip. avem 2 cazuri $a>b$ sau $a<b$. Se rezolvă inecuația$|x-a|+|x-b| \leq r$ într-unul din cazuri 1p

Se obține soluția $I(a,b)=\left[\frac{a+b-r}{2},\frac{a+b+r}{2}\right]$ interval de lungime r 3p

Subiectul 3. În patrulaterul ABCD o dreaptă d conține punctul O de intersecție a diagonalelor AC și BD și intersectează laturile (AB) și (CD) în punctele M și N. Să se demonstreze că: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OD}{OB}$

Soluție:



Din t. lui Menelaus în ΔABC⇒$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{OA}{OC} \cdot \frac{CP}{BP} = 1$,de unde

$\frac{MA}{MB} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{CP}{BP}$ (1) 3p

Din t.lui Menelaus în $\Delta BCD \Rightarrow \frac{OB}{OD} \cdot \frac{DN}{NC} \cdot \frac{CP}{BP} = 1$,de unde

$\frac{DN}{NC} = \frac{OD}{OB} \cdot \frac{BP}{CP}$ (2) 2p

Prin înmulțirea relațiilor (1) și (2) rezultă relația de demonstrat..1p

Dacă $MN /\!/ AD /\!/ BC$, $\frac{MA}{MB} = \frac{OD}{OB}$ și $\frac{DN}{NC} = \frac{OA}{OC}$ și se înmulțesc cele 2 proporții 1p

Subiectul 4. Se dă șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 =- 1$,$x_2 = 1$ și $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{2} \cdot (3^n - 4n - 1)$;

b) Să se demonstreze că oricare doi termeni conscutivi ai șirului sunt numere întregi prime între ele.

Soluție:

a) $x_3 = 4x_2 - 3x_1 = 7 = 3^2 - 2$, $x_4 = 4x_3 - 3x_2 = 25 = 3^3 - 2$ 1p

Se demonstrează prin inducție completă că $x_n = 3^{n-1} - 2, n \geq 1$.......................................2p

Atunci $\sum_{k=1}^{n} \left(3^{k-1} - 2\right) = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} - 2n = \frac{1}{2} \cdot (3^n - 4n - 1)$...........................1p

b) Fie $(3^{n-1} - 2, 3^n - 2) = d \Rightarrow d | 3^n - 2 - 3 \cdot (3^{n-1} - 2) = 4$,deci $d \in \{1,2,4\}$......... 2p

$d = 4 \Rightarrow 3^n = 4k + 2$ contradicție, $d = 2 \Rightarrow 3^n = 2k + 2$ contradicție, deci $d = 1$........... 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018–

CLASA a X-a
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, cu proprietatea $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$ și $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Să se demonstreze că:

a) $|z| = 1$ și $z \neq 1$

b) $\{z^n | n \in \mathbb{Z}\} = \{1, z, z^2\}$

Soluție:

a) $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$. 1p

Dacă $z = 1$, rezultă $z_1 = z_2$ și $|z_1| = |z_1 + z_2| = |2z_1| = 2|z_1|$, absurd,

pentru că $z_1 \neq 0$ 2p

b) Fie $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = z + 1$ și prin calcul rezultă $|u_1 - u_2| = |u_2 - u_3| = |u_3 - u_1| = 1$, deci triunghiul cu vârfurile de afixe u_1, u_2, u_3 este echilateral deci $\arg z \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$. 2p

Rezultă că $z^3 = 1$. Dar $n \in Z$ și $1, z, z^2$ sunt distincte două câte două, egalitatea este demonstrată..2p

Subiectul 2. Fie $a, b, c > 1$. Să se arate că

a) $\log_a (b \cdot c) + \log_b (c \cdot a) + \log_c (a \cdot b) \geq 6$

b) $\log_a \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} + \log_b \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} + \log_c \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq 3$

Soluție:

a) $\log_x y + \log_y x \geq 2\sqrt{\log_x y \cdot \log_y x} = 2 \cdot \sqrt{\log_x y \cdot \frac{1}{\log_x y}} = 2,$

pentru orice $x, y > 1$.. 2p

Obținem: $\log_a b + \log_b a + \log_a c + \log_c a + \log_b c + \log_c b \geq 3 \cdot 2 = 6$..............1p

b) Deoarece $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \sqrt{\sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}} = \sqrt[3]{abc}$, din inegalitatea mediilor….….........1p

Utilizând și punctul a) al problemei, membrul stâng al inegalității devine mai mare sau egal cu: $\log_a \sqrt[3]{abc} + \log_b \sqrt[3]{abc} + \log_c \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{3}[\log_a a + \log_a (b \cdot c) + \log_b b + \log_b (c \cdot a) + \log_c c + \log_c (a \cdot b)] \geq \frac{1}{3} \cdot (3 + 6) = 3$...3p

Subiectul 3. a) Să se calculeze numărul real $x = \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} - 10} - \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{3} + 10}$.

b) Să se demonstreze că $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_5 2} \geq 3$

Soluție:

a) Cum $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$, rezultă

$x^3 = 6\sqrt{3} - 10 - 6\sqrt{3} - 10 - 3 \cdot \sqrt[3]{36 \cdot 3 - 100} \cdot x$; $x^3 = -20 - 6x$; $x^3 + 6x + 20 = 0$.............2p

$(x+2)(x^2 - 2x + 10) = 0$, după descompunere, $x + 2 = 0, x = -2$...............................2p

b) Cu schimbarea de bază și inegalitatea mediilor membrul stâng devine

$$\frac{\lg 2}{\lg 3} + \frac{\lg 3}{\lg 5} + \frac{\lg 5}{\lg 2} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 2}} = 3$$

inegalitatea fiind strictă...….............................3p

Subiectul 4. a) Să se rezolve ecuația $\left(\sqrt{5} + 2\right)^x + \left(\sqrt{5} - 2\right)^x = 18$.

b) Să se arate că $\left(\frac{b}{c}\right)^{\lg a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\lg b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\lg c} = 1$, unde $a, b, c > 0$

Strada Corneliu Coposu, nr.26, Telefon: 0257-280008, Fax 0257-214746,

web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

Soluție:

a) Notăm:

$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x}=t;\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)=1; t+\frac{1}{t}=18; t^{2}-18t+1=0; t_{1,2}=9\pm 4\sqrt{5}$....1p

I. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x}=9+4\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{2}\Rightarrow x=2$ ….....................................1p

II. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x}=9-4\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-2\right)^{2}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)^{2}}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-2}\Rightarrow x=-2$…………..1p

b) Logaritmăm în baza 10, expresia din membrul stâng. Rezultă:

$\lg a\cdot\lg\left(\frac{b}{c}\right)+\lg b\cdot\lg\left(\frac{c}{a}\right)+\lg c\cdot\lg\left(\frac{a}{b}\right)=\lg a\,(\lg b-\lg c)+\lg b\,(\lg c-\lg a)+$
$\lg c\,(\lg a-\lg b)=0$, după calcule. ………………………………………………………..3p

Deci expresia este egală cu 1……………………………………………………………1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018–

CLASA a XI-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Să se rezolve în mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Soluție:

Cum $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$ arată că $\det X = 1$ (1 punct)

Scrie relația Hamilton- Cayley pentru matricea X și obține $X^2 = tr(X)\cdot \mathrm{X} - \mathrm{I}_2$ (1 punct)

Calculează $X^3 = tr(X)\cdot X^2 - X = \left(tr(X)^2 - 1\right)X - tr(X)\cdot I_2$ (1 punct)

Obține $18 = tr\left(X^3\right) = tr\left[\left(tr(X)^2 - 1\right)X - tr(X)\cdot I_2\right] = tr^3(X) - 3\cdot tr(X)$ (1 punct)

Rezolvă ecuația și determină $tr(X) = 3$ (1 punct)

Determină $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ (2 puncte)

Subiectul 2. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$. Să se arate că $\det\left(I_n + A + A^2\right) \geq 0$.

Soluție:

Arată că $I_n + A + A^2 = \left(A + \frac{1}{2}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2$ (2 puncte)

Demonstrează că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ atfel încât $A \cdot B = B \cdot A$,

atunci $\det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0.$ (4 puncte)

Finalizează (1 punct)

Subiectul 3. Fie șirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ definit prin $x_{n+1} = \dfrac{8 + 2x_n^3}{3x_n^2}$, $\forall n \geq 1$, $x_1 > 2$ și $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ definit prin $y_{n+1} = \dfrac{2y_n^3 + 3y_n^2 + 7}{3\left(y_n + 1\right)^2}$, $\forall n \geq 1$ și $y_1 > 0$. Arătați că șirurile $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ și $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ sunt convergente și calculați limitele lor.

Soluție:

Folosește inegalitatea mediilor și arată că $x_{n+1} = \dfrac{8 + x_n^3 + x_n^3}{3x_n^2} \geq 2, \forall n \geq 1$. (1 punct)

Arată că $x_{n+1} - x_n = \dfrac{8 - x_n^3}{3x_n^2} \leq 0$, $\forall n \geq 1$ și trage concluzia că șirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ este

convergent (1 punct)

Trece la limită în relația de recurență și obține $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ (1 punct)

Arată că $y_{n+1} + 1 = \dfrac{2\left(y_n + 1\right)^3 + 8}{3\left(y_n + 1\right)^2}$. (1 punct)

Dacă notăm $y_n + 1 = x_n$ avem $x_{n+1} = \dfrac{8 + 2x_n^3}{3x_n^2}$ care am arătat că este un șir

convergent (1 punct)

Prin urmare șirul $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ este un șir convergent (1 punct)

și arată că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ (1 punct)

Subiectul 4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2017+\cos\sqrt{x^2+x+2}}{2017+\cos\sqrt{x^2+x+1}}$.

a) Arătați că $f(0)<1$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$.

Soluție:

a) $f(0)=\dfrac{2017+\cos\sqrt{2}}{2017+\cos\sqrt{1}}$ (1 punct)

Pe intervalul $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ funcția cosinus este descrescătoare iar $0<1<\sqrt{2}<\dfrac{\pi}{2}$,

deci $f(0)<1$. (1 punct)

b) Arată că

$$f(x)-1=\frac{-2\sin\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x+1}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x+1}}{2}}{2017+\cos\sqrt{x^2+x+1}}$$ (1 punct)

Arată că

$$|f(x)-1|\le\frac{2\left|\sin\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x+1}}{2}\right|}{2017+\cos\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{2\left|\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}\right|}{2017+\cos\sqrt{x^2+x+1}}$$ (2 puncte)

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=0$ obține că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\left|\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}\right|}{2017+\cos\sqrt{x^2+x+1}}=0$$ (1 punct)

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)-1|=0$ de unde $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ (1 punct)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 18.02.2018–

CLASA a XII-a
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care au primitive F pe $\mathbb{R}$, astfel încât $F^2(x)\cdot f(x)=x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$? Justificați.

Soluție:

$f(x)=F'(x)\Rightarrow\int F^2(x)F'(x)dx=\int xdx$ (1) 1p

$\int F^2(x)F'(x)dx=F^3(x)-\int F(x)\cdot(F^2(x))'dx=F^3(x)-2\int F^2(x)F'(x)dx$, deci
$\int F^2(x)F'(x)dx=\frac{1}{3}F^3(x)+C$ 3p

Din (1) rezultă $\frac{1}{3}F^3(x)=\frac{1}{2}x^2+C_1$, de unde $F(x)=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot x^2+C_1}$,$x\in R$ 1p

$f(x)=F'(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}x^2+C_1\right)^2}}$, cu $C_1>0$ constantă arbitrară (pentru ca domeniul de definiție al lui f să fie R) 2p

Subiectul 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{(\sin x)^2}$

Soluție:

$f:R\to R,f(t)=e^{t^2}$ e continuă deci admite primitive pe R. Dacă $F:R\to R$ este o primitivă a sa , F este derivabilă și $F'(t)=e^{t^2},(\forall)t\in R$ 2p

Din continuitatea lui $f\Rightarrow$ e integrabilă pe $[0,x^2]$, deci $\int_0^{x^2}f(t)dt=F(x^2)-F(0)$........ 2p

F continuă$\Rightarrow \lim_{x\to 0} F(x) = F(0)$. Deoarece avem cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ se poate aplica teorema lui l'Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{(\sin x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{F(x^2)-F(0)}{(\sin x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2xF'(x^2)}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{e^{x^4}}{\cos x} = 1$$ 3p

Subiectul 3. Fie $(G_1,\cdot)$,$(G_2,\cdot)$ două grupuri și $H \subset G_1$ un subgrup al lui G_1. Să se arate că dacă $f{:}G_1 \to G_2$ este morfism de grupuri, atunci mulțimea $f(H) = \{f(x)|x \in H\}$ este subgrup al lui G_2 .

Soluție:

$f{:}G_1 \to G_2$ morfism $\Rightarrow e_2 = f(e_1) \in f(H)$ 1p

Fie $a,b \in f(H)$. Atunci există $x,y \in H : a = f(x), b = f(y)$ 2p

$a\cdot b^{-1} = f(x)\cdot[f(y)]^{-1} = f(x)\cdot f(y^{-1}) = f(x\cdot y^{-1})$ 3p

$x\cdot y^{-1} \in H \Rightarrow f(x\cdot y^{-1}) \in f(H)$ deci $a\cdot b^{-1} \in f(H) \Rightarrow f(H)$ subgrup 1p

Subiectul 4. Fie $G = \{A_1,A_2,\dots,A_n\} \subset \mathcal{M}_p(C)$ astfel încât $(G,\cdot)$ este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor. Arătați că $\left(\sum_{k=1}^n A_k\right)^2 = n\cdot\sum_{k=1}^n A_k$

Soluție:

Deoarece $(G,\cdot)$ este grup, în tabla Cayley pe fiecare linie (coloană) fiecare element apare o singură dată 2p

.	A_1	A_2	...	An
A_1	$A_1.A_1$	$A_1.A_2$	...	$A_1.A_n$
A_2	$A_2.A_1$	$A_2.A_2$	...	$A_2.A_n$
...	...	...	...	...
An	$A_n.A_1$	$A_n.A_2$	...	$A_n.A_n$

....1p

Deci adunând elementele pe linii se obține :

$$A_1 \cdot (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$A_2 \cdot (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

....

$$A_n \cdot (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$ 2p

Se dă factor comun la stânga și se ține cont că adunarea matricelor este comutativă. Sumând cele n relații, se obține: $(A_1 + A_2 + \dots + A_n)^2 = n \cdot (A_1 + A_2 + \dots + A_n)$....................... ..2p