OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A V-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Produsul a două numere este 540. Dacă primul număr s-ar mări cu 5, atunci produsul lor ar fi 600. Aflați numerele.

Soluție:
Notăm a și b cele două numere. Avem $a \cdot b = 540$, (1) și $(a+5) \cdot b = 600$, (2).
Din (1) și (2) avem $a \cdot b + 5 \cdot b = 600 \Leftrightarrow 540 + 5 \cdot b = 600 \Leftrightarrow 5 \cdot b = 60 \Leftrightarrow b = 12$
Cum $a \cdot 12 = 540 \Leftrightarrow a = 45$. Numerele căutate sunt 45 și 12.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notează a și b cele două numere ………………………………………………………...	1 p
Scrie relațiile: $a \cdot b = 540$ și $(a+5) \cdot b = 600$ ………………………………………………..	2 p
Obține $b = 12$ și $a = 45$ …………………………………………………………………...	4p

Subiectul 2. Fie numărul natural $n = \overline{11\dots1} + \overline{22\dots2} + \dots + \overline{88\dots8} + \overline{99\dots9}$, fiecare număr de forma $\overline{aa\dots a}$ conținând câte 2015 cifre de a. Determinați câte cifre de 9 conține numărul n.

Soluție:
$n = 1 \cdot \overline{11\dots1} + 2 \cdot \overline{11\dots1} + 3 \cdot \overline{11\dots1} + \dots + 8 \cdot \overline{11\dots1} + 9 \cdot \overline{11\dots1}$
$= (1+2+3+\dots+8+9) \cdot \overline{11\dots1} = 45 \cdot \overline{11\dots1}$.
Obținem $n = \overline{499\dots95}$, număr ce are 2016 cifre. Deci n conține 2014 de 9.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Deduce că $n = (1+2+3+\dots+8+9) \cdot \overline{11\dots1} = 45 \cdot \overline{11\dots1}$ …………………………...	3 p
Obține că $n = \overline{499\dots95}$ …………………………………………………………………...	2 p
Precizează că numărul n are 2016 cifre de unde deduce că n conține 2014 de 9……………..	2 p

Subiectul 3. Se consideră 5 numere naturale cu media aritmetică egală cu 24. Împărțind pe rând primul număr la suma dintre al doilea și al treilea, apoi al doilea număr la suma dintre al treilea și al patrulea, iar la final pe al treilea la suma dintre al patrulea și al cincilea se obține de fiecare dată câtul 2 și restul 1. Știind că ultimele două numere sunt consecutive, aflați numerele.

Soluție:
Notăm primul număr cu x, al doilea număr cu y, al treilea număr cu z, al patrulea număr cu t, al cincilea număr cu u.
Avem $(x+y+z+t+u):5 = 24$ de unde avem suma $x+y+z+t+u = 5 \cdot 24 = 120$, (1)
Folosind teorema împărțirii cu rest obținem:

$x:(y+z) = 2 \; rest \; 1 \Longrightarrow x = 2(y+z)+1, \quad 1 < y+z$, (2);
$y:(z+t) = 2 \; rest \; 1 \Longrightarrow y = 2(z+t)+1, \quad 1 < z+t$, (3);
$z:(t+u) = 2 \; rest \; 1 \Longrightarrow z = 2(t+u)+1, \quad 1 < t+u$, (4).

Cum $u = t + 1$ obținem din (4) că $z = 2(t + t + 1) + 1 = 4t + 3$. Din ultima relație și (3) se obține $y = 2(4t + 3 + t) + 1 = 10t + 7$. Din (2) obținem $x = 2(10t + 7 + 4t + 3) + 1 = 28t + 21$.
Din ultimele relații si din (1) avem:

$$28t + 21 + 10t + 7 + 4t + 3 + t + t + 1 = 120 \Leftrightarrow 44t = 88 \Leftrightarrow t = 2$$

Avem $x = 28 \cdot 2 + 21 = 77$, $y = 10 \cdot 2 + 7 = 27$, $z = 4 \cdot 2 + 3 = 11$ și $u = 2 + 1 = 3$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notează primul număr cu x, al doilea număr cu y, al treilea număr cu z, al patrulea număr cu t, al cincilea număr cu u ……………………………………………………………………	1 p
Din $(x + y + z + t + u) : 5 = 24$ deduce $x + y + z + t + u = 120$, (1) ……………………	1 p
Folosește teorema împărțirii și obține relațiile: $x = 2(y + z) + 1$, $y = 2(z + t) + 1$, $z = 2(t + u) + 1$ ……………………………………..	1 p
Precizează că $u = t + 1$ și deduce că $z = 4t + 3$, $y = 10t + 7$ și $x = 28t + 21$ …………..	1 p
Folosește în (1) relațiile obținute și determină $t = 2$ …………………………………………	1 p
Calculează $x = 77$, $y = 27$, $z = 11$ și $u = 3$ …………………………………………………	1 p
Cazul $u = t - 1$ nu convine	1 p

Subiectul 4. Determinați numerele $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ba} + \overline{ab}$ și $\overline{ba} - \overline{ab}$ sunt pătrate perfecte.

Soluție:

Avem $\overline{ba} + \overline{ab} = 11(a + b)$ și $\overline{ba} - \overline{ab} = 9(b - a)$. Pentru ca $\overline{ba} + \overline{ab}$ și $\overline{ba} - \overline{ab}$ să fie pătrate perfecte trebuie ca $b + a = 11$ și $b - a \in \{1,\ 4,\ 9\}$. Avem cazurile:

1) $\left.\begin{array}{l} b + a = 11 \\ b - a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b = 12 \Rightarrow b = 6$ și $a = 11 - 6 = 5$.

2) $\left.\begin{array}{l} b + a = 11 \\ b - a = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b = 15 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$, cazul nu convine.

3) $\left.\begin{array}{l} b + a = 11 \\ b - a = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b = 20 \Rightarrow b = 10$, cum b este cifră acest caz nu convine.

Singura variantă este $a = 5$ și $b = 6$ de unde avem $\overline{ab} = 56$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Deduce că $\overline{ba} + \overline{ab} = 11(a + b)$ și $\overline{ba} - \overline{ab} = 9(b - a)$	2 p
Precizează că $b + a = 11$ și $b - a \in \{1,\ 4,\ 9\}$.	2 p
Demonstrează că singura variantă este $a = 5$ și $b = 6$ de unde $\overline{ab} = 56$	3 p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A VI-A

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Demonstrați că numerele naturale, care împărțite în $\mathbb{N}$ la 102 dau restul 78, sunt divizibile cu 3.

Soluție:

Fie $n \in \mathbb{N},\ n: 102 = c$ rest 78.

Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem $n = 102c + 78 = 3 \cdot (34c + 26)$, de unde numărul n este divizibil cu 3.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Notează cu $n \in \mathbb{N}$, $n: 102 = c$ rest 78	1p
Aplică teorema împărțirii cu rest și obține $n = 102c + 78$	1p
Deduce că $n = 3 \cdot (34c + 26)$	4p
Precizează că numerele n sunt divizibile cu 3 ………………………………………………...	1p

Subiectul 2. Fie unghiurile adiacente suplementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ astfel încât raportul măsurilor să fie $\frac{1}{4}$. Fie $[OD$ semidreapta opusă bisectoarei unghiului $\sphericalangle BOC$. În interiorul unghiului $\sphericalangle COD$ se consideră punctele M și N astfel încât $m(\sphericalangle CON) = m(\sphericalangle DOM) = 2 \cdot m(\sphericalangle MON) > 45^0$.

a) Aflați măsura unghiului $\sphericalangle COD$.
b) Demonstrați că punctele B, O, M sunt coliniare.

Soluție:

a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$.

Avem $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^0$ de unde se deduce că $m(\sphericalangle BOC) = 180^0 - x$. Cum

$$\frac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle BOC)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{180^0 - x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x = 180^0 - x \Rightarrow 5x = 180^0 \Leftrightarrow x = 36^0$$

obținem $m(\sphericalangle AOB) = 36^0$ și $m(\sphericalangle BOC) = 180^0 - 36^0 = 144^0$.

Fie $[OX$ bisectoarea $\sphericalangle BOC$. Avem $m(\sphericalangle BOX) = m(\sphericalangle XOC) = 144^0 : 2 = 72^0$. Cum $[OX$ și $[OD$ sunt semidrepte opuse avem $m(\sphericalangle XOD) = 180^0$ de unde avem

$$m(\sphericalangle COD) = 180^0 - m(\sphericalangle XOC) = 180^0 - 72^0 = 108^0.$$

b) Se discută pe cazuri:

Cazul $[\boldsymbol{ON} \subset \boldsymbol{Int}(\sphericalangle \boldsymbol{COM})$

Notăm $m(\sphericalangle MON) = a \Rightarrow m(\sphericalangle DOM) = m(\sphericalangle CON) = 2a$

$$m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle DON) + m(\sphericalangle NOM) + m(\sphericalangle MOC) \Rightarrow 5a = 108^0 \Rightarrow a = 21^0\, 36'$$

Cum $m(\sphericalangle COD) = 2a = 43^0\, 12' < 45^0$, acest caz nu convine.

Cazul $[\boldsymbol{OM} \subset \boldsymbol{Int}(\sphericalangle \boldsymbol{CON})$

Notăm $m(\sphericalangle MON) = a$ Avem $m(\sphericalangle DOM) = m(\sphericalangle CON) = 2a \Rightarrow m(\sphericalangle COM) = 2a - a = a$.

$$m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle DOM) + m(\sphericalangle MOC) \Leftrightarrow 3a = 108^0 \Leftrightarrow a = 36^0$$

Deci $m(\sphericalangle CON) = m(\sphericalangle DOM) = 2a = 72^0 > 45^0$, convine.

$m(\sphericalangle BOM) = m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COM) = 144^0 + 36^0 = 180^0 \Longrightarrow B, O, M$ coliniare.

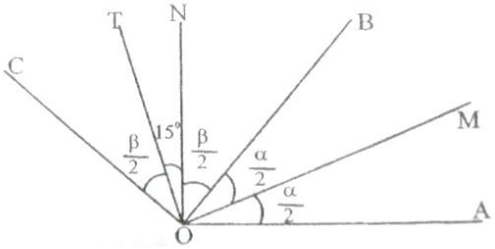
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Figura corespunzătoare problemei..	1p
a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$ și deduce că $m(\sphericalangle BOC) = 180^0 - x$	1p
Determină $x = 36^0$ de unde obține $m(\sphericalangle AOB) = 36^0$ și $m(\sphericalangle BOC) = 144^0$	1p
b) Studiază **cazul** $[ON \subset Int(\sphericalangle COM)$ Notează $m(\sphericalangle MOM) = a \Rightarrow m(\sphericalangle DOM) = m(\sphericalangle CON) = 2a$ Deduce că $a = 21^0\ 36'$ și cum $m(\sphericalangle COD) = 2a = 43^0\ 12' < 45^0$, acest caz nu convine.	2p
Studiază **cazul** $[OM \subset Int(\sphericalangle CON)$ Notează $m(\sphericalangle MOM) = a \Longrightarrow m(\sphericalangle CON) = 2a \Rightarrow m(\sphericalangle COM) = 2a - a = a.$ Deduce că $a = 36^0$ și $m(\sphericalangle CON) = m(\sphericalangle DOM) = 2a = 72^0 > 45^0$, acest caz convine. Arată că $m(\sphericalangle BOM) = 180^0 \Longrightarrow B, O, M$ coliniare.	2p

Subiectul 3. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, astfel încât bisectoarele lor $[OM$ și $[ON$ să formeze un unghi de 75^0.

a) Să se determine $m(\sphericalangle AOB)$ și $m(\sphericalangle BOC)$ știind că $3 \cdot m(\sphericalangle AOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOC)$.

b) Dacă semidreapta $[OT$ formează unghi drept cu semidreapta $[OM$ astfel încât punctele M și T sunt de aceeași parte cu punctul B față de punctul A. Calculați: $m(\sphericalangle TON)$, $m(\sphericalangle BON)$ și $m(\sphericalangle BOT)$ și $m(\sphericalangle COT)$.

Soluție:



a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = \alpha$ și $m(\sphericalangle BOC) = \beta$. Avem:

$[OM$ bisectoarea $\sphericalangle AOB \Longrightarrow m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MOB) = \dfrac{\alpha}{2}$;

$[ON$ bisectoarea $\sphericalangle BOC \Longrightarrow m(\sphericalangle BON) = m(\sphericalangle NOC) = \dfrac{\beta}{2}$.

Cum $m(\sphericalangle MON) = 75^0$ avem că $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 75^0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 150^0 \Rightarrow \alpha = 150^0 - \beta$, (1).

Dar $3 \cdot m(\sphericalangle AOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOC) \Longrightarrow 3\alpha = 2\beta$, (2).

Din (1) și (2) avem $3(150^0 - \beta) = 2\beta \Leftrightarrow 450^0 = 5\beta \Leftrightarrow \beta = 90^0$ și $\alpha = 150^0 - 90^0 = 60^0$.

Avem $m(\sphericalangle AOB) = 60^0$ și $m(\sphericalangle BOC) = 90^0$.

b) Avem $m(\sphericalangle MOT) = 90^0$ de unde avem: $m(\sphericalangle TON) = 90^0 - [m(\sphericalangle NOB) + m(\sphericalangle MOB)] = 15^0$;

$m(\sphericalangle \mathrm{BON}) = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{90^0}{2} = 45^0$; $m(\sphericalangle BOT) = m(\sphericalangle BON) + m(\sphericalangle TON) = 45^0 + 15^0 = 60^0$;

$m(\sphericalangle COT) = m(\sphericalangle CON) - m(\sphericalangle TON) = 45^0 - 15^0 = 30^0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Figura corespunzătoare problemei..	1p
a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = \alpha$ și $m(\sphericalangle BOC) = \beta$ și deduce că $\alpha + \beta = 150^0$	1p
Determină $m(\sphericalangle AOB) = 60^0$ și $m(\sphericalangle BOC) = 90^0$	1p
b) Precizează că $m(\sphericalangle MOT) = 90^0$ și calculează $m(\sphericalangle TON) = 15^0$	1p
$m(\sphericalangle BON) = 45^0$	1p
$m(\sphericalangle BOT) = 60^0$	1p
$m(\sphericalangle COT) = 30^0$	1p

Subiectul 4. Determinați numerele naturale n știind că fracția $\frac{3n+1}{2n-7}$ este reductibilă.

Soluție:

Dacă fracția este reductibilă atunci există $d \neq 1$ astfel încât $d|3n+1$ și $d|2n-7$. De aici avem $d|2(3n+1)-3(2n-7)$, adică $d|23$, prin urmare $d=23$. Acum $23|3n+1$ și $23|2n-7$ deducem că $23|n+8$, adică $n+8=23k$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$. Se verifică pentru $n=23k-8$, $k \in \mathbb{N}^*$, fracția este reductibilă.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Precizează că există $d \neq 1$ astfel încât $d\|3n+1$ și $d\|2n-7$ …………………………………..	1p
Deduce că $d\|2(3n+1)-3(2n-7) \Rightarrow d\|23 \Rightarrow d=23$ ………………………………………..	2p
Din $23\|3n+1$ și $23\|2n-7 \Rightarrow 23\|n+8$ adică $n+8=23k$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$ …………………….	2p
Precizează că fracția este ireductibilă pentru $n=23k-8$, $k \in \mathbb{N}^*$ …………………………..	2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A VII-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Enumerați elementele mulțimilor:

$$A=\left\{a\in\mathbb{Q}\,\middle|\,a=\sqrt{\frac{2-x}{4}},x\in\mathbb{N}^*\right\} \text{ și } B=\left\{x\in\mathbb{N}^*\,\middle|\,a=\sqrt{\frac{2-x}{9}},a\in\mathbb{Q}\right\}.$$

Determinați $A\cup B,\ A\cap B,\ A\backslash B,\ B\backslash A$.

Soluție:

Din $a=\sqrt{\frac{2-x}{4}}=\frac{\sqrt{2-x}}{2}$ și $a\in\mathbb{Q}$ avem că $2-x$ este pătrat perfect și $2-x\geq 0\Rightarrow x\leq 2$, $x\in\mathbb{N}^*$.

Pentru $x=1$ avem $a=\frac{\sqrt{2-1}}{2}=\frac{1}{2}$ iar pentru $x=2$ avem $a=\frac{\sqrt{2-2}}{2}=0$, de unde $A=\left\{0,\ \frac{1}{2}\right\}$.

Din $a=\sqrt{\frac{2-x}{9}}=\frac{\sqrt{2-x}}{3}$ și $a\in\mathbb{Q}$ avem că $2-x$ este pătrat perfect și $2-x\geq 0\Rightarrow x\leq 2$, $x\in\mathbb{N}^*$.

Pentru $x=1$ avem $a=\frac{\sqrt{2-1}}{3}=\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$, și pentru $x=2$ avem $a=\frac{\sqrt{2-2}}{3}=0\in\mathbb{Q}$, de unde $B=\{1,\ 2\}$.

Avem $A\cup B=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$, $A\cap B=\emptyset$, $A\setminus B=A, B\setminus A=B$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Determină mulțimile $A=\left\{0,\ \frac{1}{2}\right\}$ și $B=\{1,\ 2\}$	3p
Determină $A\cup B=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$, $A\cap B=\emptyset$, $A\setminus B=A, B\setminus A=B$	4p

Subiectul 2. Fie $x\neq 1$, $y\neq -2$, $z\neq -3$ numere raționale, astfel încât $\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014$.

Calculați $\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}$.

Soluție:

Din $\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014$, împărțind egalitatea la 2015 avem $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}=\frac{2014}{2015}$.

Cum $\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}=\frac{x+1-2}{x+1}+\frac{y+2-2}{y+2}+\frac{z+3-2}{z+3}=1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{2}{y+2}+1-\frac{2}{z+3}=$

$$=3-2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)=3-2\cdot\frac{2014}{2015}==\frac{2017}{2015}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Arată că $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}=\frac{2014}{2015}$	2p
Calculează $\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}.=3-2\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)=\frac{2017}{2015}$	5p

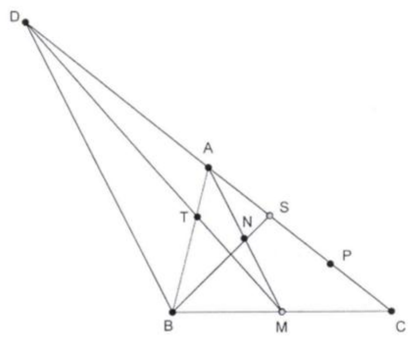
Subiectul 3. În triunghiul oarecare ABC, se consideră M și N mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[AM]$, punctul D simetricul punctului C față de A, $BN\cap AC=\{S\}$, $DM\cap AB=\{T\}$ și punctul P mijlocul segmentului $[SC]$.

a) Demonstrați că $AC=3PC$.

b) Demonstrați că dreptele ST și BC sunt paralele.

c) Calculați aria triunghiului ANS, știind că aria triunghiului ABC este egală cu 48cm^2.

Soluție:



a) În ΔSBC, $[MP]$ este linie mijlocie de unde avem $MP\parallel BS$.
În ΔAMP avem $NS\parallel MP$ și N mijloacele segmentelor $[AM]$ avem din reciproca teoremei liniei mijlocii că S este mijlocul segmentelor $[AP]$. Prin urmare avem $AS=SP=PC=\frac{AC}{3}$, deci $AC=3\cdot PC$.

b) În ΔDBC, $[DM]$ și $[BA]$ sunt mediane și $DM\cap AB=\{T\}$ de unde rezultă că T este centrul de greutate a ΔDBC. Avem că $\frac{AT}{AB}=\frac{1}{3}$. Din $AS=\frac{AC}{3}$ avem $\frac{AS}{AC}=\frac{1}{3}$. Cum $\frac{AT}{AB}=\frac{AS}{AC}$, din reciproca teoremei lui Thales se obține că $ST\parallel BC$.

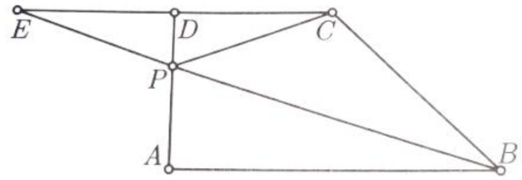
c) Dacă $AS=a\Rightarrow SC=2a,\ AD=3a.$ Deoarece $[AM]$ este linie mijlocie în ΔDBC avem $AM\parallel BD,$ ceea ce înseamnă că $AN\parallel BD.$ Aplicând teorema lui Thales în ΔSBD avem: $\frac{SN}{SB}=\frac{SA}{SD}=\frac{1}{4}$, deci $\frac{A_{\Delta ANS}}{A_{\Delta ABS}}=\frac{1}{4}$, (1). Deoarece $\frac{AS}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{A_{\Delta ABS}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{1}{3}$, (2). Înmulțind relațiile (1) și (2) obținem $\frac{A_{\Delta ANS}}{A_{\Delta ABS}}=\frac{1}{12}$, deci $A_{\Delta ANS}=4\text{cm}^2$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Demonstrați că $AC=3PC$	2p
b) Demonstrați că $ST\parallel BC$	3p
c) Notează $AS=a,\ SC=2a,\ AD=3a$ și arată că $\frac{A_{\Delta ANS}}{A_{\Delta ABS}}=\frac{1}{4}$ și $\frac{A_{\Delta ABS}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{1}{3}$	1p

Obține prin înmulțire că $\frac{A_{\Delta ANS}}{A_{\Delta ABS}}=\frac{1}{12}$ și deduce că $A_{\Delta ANS}=4\,\text{cm}^2$................................	1p

Subiectul 4. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90^0$ și P un punct variabil pe $[AD]$. Arătați că suma $PB+PC$ este minimă dacă și numai dacă $\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{CD}$.

Soluție:



Fie E simetricul lui C față de punctul D. Cum PD este mediană și înălțime în ΔPEC avem ΔPEC isoscel de unde $PC=PE$ și $PB+PC=PB+PE$. Suma $PB+PE$ este minimă dacă punctele E, P, B sunt coliniare. Aceasta este echivalentă cu a spune că $\Delta PDE\sim\Delta PAB$, de unde $\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{DC}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Construiește E simetricul lui C față de punctul D	1p
Deduce că $PB+PC=PB+PE$	2p
Precizează că suma $PB+PE$ este minimă dacă punctele E, P, B sunt coliniare	2p
Precizează echivalenta cu a faptul că $\Delta PDE\sim\Delta PAB$, de unde $\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{DC}$	2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A VIII-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Fie $a \in \mathbb{R}$. Demonstrați că dacă $a^{18} \in \mathbb{Q}$ și $a^{11} \in \mathbb{Q}$, atunci $a \in \mathbb{Q}$.

Soluție:

Pentru $a \neq 0$ avem:
- $a^{11} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a^{11})^5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{55} \in \mathbb{Q}$, (1);
- $a^{18} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a^{18})^3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{54} \in \mathbb{Q}$, (2) ;

Din (1) și (2) $\Rightarrow a^{55} : a^{54} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$.
Pentru $a = 0 \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
cazul $a \neq 0$	
- $a^{11} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a^{11})^5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{55} \in \mathbb{Q}$, (1)	2p
- $a^{18} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a^{18})^3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{54} \in \mathbb{Q}$, (2)	2p
Din (1) și (2) $\Rightarrow a^{55} : a^{54} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$..	2p
cazul $a = 0 \Rightarrow a \in \mathbb{Q}$	1p

Subiectul 2. Determinați valorile întregi ale lui x și y astfel încât

$$x - 3y + 4 = 0 \quad \text{și} \quad \sqrt{x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4} \in \mathbb{Q}.$$

Soluție:

Din $x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow x + 4 = 3y$

Din $x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4 = x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4 + 12 - 12 = x^2 + 8x + 16 + 7y^2 + 8y - 12 =$

$= (x+4)^2 + 7y^2 + 8y - 12 = (3y)^2 + 7y^2 + 8y - 12 = 9y^2 + 7y^2 + 8y - 12 =$

$= 16y^2 + 8y + 1 - 13 = (4y+1)^2 - 13$.

Din $\sqrt{x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4} \in \mathbb{Q}$ avem că $(4y+1)^2 - 13 = k^2$, pentru k $\in \mathbb{Q}$.

Cum $(4y+1)^2 - k^2 = 13 \Leftrightarrow (4y + 1 - k)(4y + 1 + k) = 13$ cu x și y din $\mathbb{Z}$. Analizând cazurile posibile obținem soluția $x = -10$ și $y = -2$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Face substituția $x + 4 = 3y$	1p
Deduce $x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4 = (4y+1)^2 - 13$	2p

Precizează că dacă $\sqrt{x^2+7y^2+8x+8y+4} \in \mathbb{Q}$ atunci $(4y+1)^2-13=k^2$, k ∈ $\mathbb{Q}$ de unde rezultă că $(4y+1-k)(4y+1+k)=13$..	2p
Analizează cazurile posibile și precizează soluția $x=-10$ și $y=-2$	2p

Subiectul 3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, considerăm Q proiecția lui D' pe $A'C$ și S proiecția lui D' pe AC'. Arătați că:

a) $A'C \perp (D'QB')$;

b) $QS \parallel (ABC)$.

Soluție:

a) $D'B' \perp (ACC') \Rightarrow D'B' \perp A'C$,

Din $A'C \perp D'Q$, $A'C \perp D'B'$, $D'Q \cap D'B = \{D'\} \Rightarrow A'C \perp (D'QB')$.

b) $\Delta D'A'C \equiv \Delta D'C'A \Rightarrow \sphericalangle D'A'C \equiv \sphericalangle D'C'A$

$\Delta D'A'Q \equiv \Delta D'C'S \Rightarrow [A'Q] \equiv [C'S]$

Din $A'Q = C'S$ și $A'O = C'O$ unde $\{O\} = A'C = AC'$ rezultă că $\Leftrightarrow QS \parallel A'C'$

Cum $A'C' \parallel AC$ și $AC \subset (ABC)$ avem $QS \parallel (ABC)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei	1p
a) $D'B' \perp (ACC') \Rightarrow D'B' \perp A'C$	1p
$A'C \perp D'Q$, $A'C \perp D'B'$, $D'Q \cap D'B = \{D'\} \Rightarrow A'C \perp (D'QB')$	1p
b) $\Delta D'A'C \equiv \Delta D'C'A \Rightarrow \sphericalangle D'A'C \equiv \sphericalangle D'C'A$	1p
$\Delta D'A'Q \equiv \Delta D'C'S \Rightarrow [A'Q] \equiv [C'S]$	1p
Din $A'Q = C'S$ și $A'O = C'O$ unde $\{O\} = A'C = AC'$ rezultă că $\Leftrightarrow QS \parallel A'C'$	1p
Deduce că $QS \parallel (ABC)$..	1p

Subiectul 4. Fie $VABCD$ o piramida patrulateră regulată. Punctul M este mijlocul înălțimii VO, punctul N este mijlocul segmentului BM, iar $P \in [AO]$ astfel încât $AP = 3 \cdot PO$. Demonstrați că $PN \parallel (VDC)$.

Soluție:

Fie $Q \in (OB)$ astfel încât $PQ \parallel AB$ și R mijlocul lui (DO). Din $PQ \parallel AB$ obținem $\frac{OQ}{QB} = \frac{OP}{PA} = \frac{1}{3}$.

Dacă $OQ = a$, atunci $BQ = 3a$, $OB = OD = 4a$, $OR = 2a$, $RQ = 3a$, adică $RQ = QB$. În ΔBMR, NQ este linie mijlocie, prin urmare $NQ \parallel MR$. În ΔVOD, MR este linie mijlocie, prin urmare $MR \parallel VD$. Rezultă așadar că $NQ \parallel VD$ și cum $PQ \parallel CD$ din construcție, rezultă $(PQN) \parallel (VDC)$. Dar $NP \subset (PQN)$, deci $PN \parallel (VDC)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Figura corespunzătoare problemei	1p
Notează $Q \in (OB)$ astfel încât $PQ \parallel AB$ și R mijlocul lui (DO).............................	1p
Din $PQ \parallel AB$ deduce că $\frac{OQ}{QB} = \frac{OP}{PA} = \frac{1}{3}$	1p
Notează $OQ = a$ și deduce că $RQ = QB$	1p

Demonstrează că NQ este linie mijlocie în ΔBMR de unde rezultă că $NQ \parallel MR$ ………….	1p
Demonstrează că MR este linie mijlocie în ΔVOD de unde rezultă că $MR \parallel VD$ …………..	1p
Arată că $(PQN) \parallel (VDC)$ și deduce că $PN \parallel (VDC)$ …………………………………...……	1p