INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017–

CLASA A IX-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $a, n \in \mathbb{N}$ au loc:

a) $|x+a| + |x-a^2| \geq a^2 + a$;

b) $|x+1| + |x+2| + \cdots + |x+n| + |x-1^2| + |x-2^2| + \cdots + |x-n^2| \geq$
$\geq \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Soluție:

a) $|x+a| + |x-a^2| = |x+a| + |a^2-x| \geq |x+a+a^2-x| = a+a^2$.
b) Membrul stâng al relației se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}(|x+k| + |x-k^2|) \geq \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Detalii notare	**Barem asociat**
a) $|x+a| + |x-a^2| \geq |x+a+a^2-x| = a+a^2$..............................	2p
b) $\sum_{k=1}^{n}(|x+k| + |x-k^2|) \geq \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k =$	2p
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} =$	2p
$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$	1p

Subiectul 2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Dacă $a_1 = 1, a_n = 2^{n-1}$, să se determine $a_k \in (0, \infty)$, $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, știind că:

$$\frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \frac{a_4^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq 2^{n+1} - 4$$

Soluție:

Deoarece $(a_k - 2a_{k-1})^2 \geq 0$, rezultă că $\frac{a_k^2}{a_{k-1}} \geq 4(a_k - a_{k-1}), \forall a_{k-1} > 0, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

Prin adunarea a $n-1$ inegalități, obținute pentru $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, vom avea

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k^2}{a_{k-1}} \geq 4\left(\sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1})\right)$$

Dar $4\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = 4(a_n - a_1) = 4(2^{n-1} - 1) = 2^{n+1} - 4$

Folosind ipoteza, rezultă că toate inegalitățile precedente devin egalități, adică $a_k = 2a_{k-1}$.
Rezultă că $a_2 = 2, a_3 = 2^2, \dots, a_{n-1} = 2^{n-1}$.

Detalii notare	**Barem asociat**
Scrierea inegalității $(a_k - 2a_{k-1})^2 \geq 0$	1p
Scrierea inegalității $\frac{a_k^2}{a_{k-1}} \geq 4(a_k - a_{k-1}), \forall a_{k-1} > 0, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$	1p
Demonstrarea faptului că toate inegalitățile devin egalități	3p
Determinarea numerelor	2p

Subiectul 3. a) Arătați că în orice triunghi ABC are loc relația $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului, iar H este ortocentrul triunghiului.

b) Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru O și care are diagonalele AC și BD perpendiculare. Dacă H_1 și H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD și ABC, arătați că $\overline{BH_2} = \overline{DH_1}$.

Soluție:

a) Egalitatea este relația lui Sylvester.

Fie D punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului, iar P mijlocul laturii BC. Patrulaterul $BHCD$ este paralelogram, pentru că laturile opuse sunt paralele, deci HD și BC au același mijloc, punctul P. Din triunghiul AHD, se obține $\overline{AH} = 2\overline{OP}$ și apoi $\overline{OB} + \overline{OC} = 2\overline{OP}$. Rezultă că $\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH} - \overline{OA}$, iar în final $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH}$.

b) Aplicăm relația de la a) în triunghiurile ACD și ABC. Se obține $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OH_1}$ și $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH_2}$. Prin scădere, avem $\overline{OH_1} - \overline{OH_2} = \overline{OD} - \overline{OB}$, sau $\overline{H_2H_1} = \overline{BD}$. Dar punctele B, D, H_1 și H_2 sunt pe aceeași dreaptă, deci $\overline{BH_2} = \overline{DH_1}$.

Detalii notare	**Barem asociat**
a) Demonstrarea faptului că $BHCD$ este paralelogram	1p
Arată că $\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{AH}$	1p
Finalizarea demonstrației	1p
b) Folosirea relației lui Sylvester în cele două triunghiuri	2p
Arată că $\overline{H_2H_1} = \overline{BD}$	1p
Finalizarea demonstrației	1p

Subiectul 4. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere pozitive cu suma 1. Să se arate că:

a) $\frac{a_1a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_2a_3}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_na_1}{a_n+a_1} \le \frac{1}{2}$;

b) $\sqrt{a_1(a_2+a_3+\cdots+a_n)} + \sqrt{a_2(a_1+a_3+\cdots+a_n)} + \cdots +$
$+\sqrt{a_n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})} \le \frac{n}{2}$.

Soluție:

a) Fie $S = \frac{a_1a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_2a_3}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_na_1}{a_n+a_1}$.

Ţinând cont de inegalitatea mediilor $m_h \le m_g \le m_a$, obţinem:

$$S \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_2+a_3}{2} + \cdots + \frac{a_n+a_1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\sqrt{a_1(a_2+a_3+\cdots+a_n)} + \sqrt{a_2(a_1+a_3+\cdots+a_n)} + \cdots + \sqrt{a_n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})} =$$

$$= \sqrt{a_1(1-a_1)} + \sqrt{a_2(1-a_2)} + \cdots + \sqrt{a_n(1-a_n)} \le$$

$$\le \frac{a_1+1-a_1}{2} + \frac{a_2+1-a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n+1-a_n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{de\ n\ ori} = \frac{n}{2}.$$

Detalii notare	**Barem asociat**
a) $S \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \cdots + \sqrt{a_na_1}\right)$	2p
$\le \frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_2+a_3}{2} + \cdots + \frac{a_n+a_1}{2}\right)$	1p
Finalizare	1p
b) Scrie suma din inegalitate sub forma: $\sqrt{a_1(1-a_1)} + \sqrt{a_2(1-a_2)} + \cdots + \sqrt{a_n(1-a_n)}$	1p
$\le \frac{a_1+1-a_1}{2} + \frac{a_2+1-a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n+1-a_n}{2}$	1p
Finalizare	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017–

CLASA A X-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Fie $a \in [-1,1]$. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} = x$. Discuție.

Soluţie:

Dacă $a = 0 \Rightarrow x = 0$

Presupunem $a \neq 0$. C.E : $\begin{cases} 1+ax \geq 0 \\ 1-ax \geq 0 \end{cases}$.

Ecuaţia este echivalentă cu $2\sqrt{1-a^2x^2} = 2 - x^2$.

Notând $x^2 = t \Rightarrow t^2 + 4t(a^2-1) = 0$.

Rezultă $x^2 = 4(1-a^2)$, deci $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{1-a^2}$

Se verifică C.E., adică $-1 \leq ax_{1,2} \leq 1$.

Detalii notare	Barem asociat
Pentru $a = 0 \Rightarrow x = 0$	1p
Dacă $a \neq 0$. C.E: $\begin{cases} 1+ax \geq 0 \\ 1-ax \geq 0 \end{cases}$	1p
Ajunge la ecuaţia echivalentă $2\sqrt{1-a^2x^2} = 2 - x^2$	2p
Notează $x^2 = t \Rightarrow t^2 + 4t(a^2-1) = 0$	1p
Rezultă $x^2 = 4(1-a^2)$, deci $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{1-a^2}$	1p
Verifică C.E., adică $-1 \leq ax_{1,2} \leq 1$	1p

Subiectul 2. Determinați funcțiile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ care verifică relația

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right)=\frac{x}{f(x\sqrt{y})},\ (\forall)x,y\in(0,\infty).$$

Soluţie:

Dacă $y=1\Rightarrow f\left(\frac{x}{f(1)}\right)=\frac{x}{f(x)}$. Notăm $f(1)=a\Rightarrow f\left(\frac{x}{a}\right)\cdot f(x)=x,(\forall)x>0$ (1).

Pentru $x=a$, din relația (1) avem că $f(a)=1$.

Dăm în relația din enunț valorile $x=\sqrt{a}$, $y=a$ și obținem că $f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$, iar dacă $y=a\Rightarrow f(x)\cdot f(x\sqrt{a})=x$, de unde pentru $x=1\Rightarrow f(1)\cdot f(\sqrt{a})=1\Rightarrow a=1$

Atunci din relația (1) avem $f^2(x)=x$, cu soluția unică $f(x)=\sqrt{x}$, $(\forall)x>0$.

Detalii notare	**Barem asociat**
Ajunge la $f\left(\frac{x}{a}\right)\cdot f(x)=x,(\forall)x>0$ (1)...	2p
Pentru $x=a$, din relația (1) obţine că $f(a)=1$	1p
Pentru $x=\sqrt{a}$, $y=a$, obține că $f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$	2p
Pentru $y=a\Rightarrow f(x)\cdot f(x\sqrt{a})=x$, de unde pentru $x=1\Rightarrow$ $f(1)\cdot f(\sqrt{a})=1\Rightarrow a=1$	1p
Din relația (1) rezultă $f^2(x)=x$, cu soluția unică $f(x)=\sqrt{x}$, $(\forall)x>0$	1p

Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: *inf_arad@isjarad.ro*

Subiectul 3. Aflați perechile (x, y) de numere strict pozitive pentru care $x + y \leq xy$ și

$$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 \leq 2 .$$

Soluţie:

Notăm $\log_2 x = a,\ \log_2 y = b$ și condițiile devin $\begin{cases} 2^a + 2^b \leq 2^{a+b} \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases}$.

Din inegalitatea mediilor avem $\frac{2^a+2^b}{2} \geq \sqrt{2^a \cdot 2^b}$, deci $2^{a+b} \geq 2^a + 2^b \geq 2^{1+\frac{a+b}{2}}$, de unde obținem că $a + b \geq 2$.

Dar $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, deci $(a + b)^2 \leq 4$, de unde $-2 \leq a + b \leq 2$.

Atunci $a + b = 2$ și $a^2 + b^2 = 2$. Se obține $a = b = 1$ și atunci $x = y = 2$.

Detalii notare	**Barem asociat**
Notează $\log_2 x = a, \log_2 y = b$ și scrie condițiile $\begin{cases} 2^a + 2^b \leq 2^{a+b} \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases}$	1p
Utilizând inegalitatea mediilor $\frac{2^a+2^b}{2} \geq \sqrt{2^a \cdot 2^b}$ ajunge la $2^{a+b} \geq 2^a + 2^b \geq 2^{1+\frac{a+b}{2}}$, de unde obține că $a + b \geq 2$	2p
Dar $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, deci $(a + b)^2 \leq 4$, de unde $-2 \leq a + b \leq 2$..........	1p
Atunci $a + b = 2$ și $a^2 + b^2 = 2$	1p
Obține $a = b = 1$	1p
Ajunge la $x = y = 2$	1p

Subiectul 4. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se determine valoarea minimă a lui $|z|$, dacă

$$|z-3i|+|z-4|=5$$

Soluţie:

Notăm P$(z), B(3i)$ şi $A(4)$. Atunci $PB=|z-3i|,\ BA=|3i-4|=5, PA=|z-4|$.

Conform enunțului, $PB+PA=AB \Rightarrow P \in [AB]$.

Deci $\min|z|=\min_{P\in[AB]} OP$, care se obține pentru $OP \perp AB$.

Obținem că $|z|_{min}=\frac{12}{5}$.

Detalii notare	**Barem asociat**
Notând P$(z), B(3i)$ şi $A(4)$, obţine $PB=\|z-3i\|,\ BA=\|3i-4\|=5$, $PA=\|z-4\|$	2p
Din $PB+PA=AB \Rightarrow P \in [AB]$	2p
$\min\|z\|=\min_{P\in[AB]} OP$, care se obține pentru $OP \perp AB$	2p
Obține că $\|z\|_{min}=\frac{12}{5}$	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017–

CLASA A XI-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = O_3$. Să se arate că

$$a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31} \leq a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 \ .$$

Soluţie:
Din $A^2 = O_3 \Rightarrow a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} = 0$ (1), $a_{22}^2 + a_{21}a_{12} + a_{23}a_{32} = 0$ (2)

și $a_{33}^2 + a_{13}a_{31} + a_{32}a_{23} = 0$ (3).

Din relațiile (1),(2),(3) $\Rightarrow a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{13}a_{31} \leq 0$ (4).

Relația de demonstrat devine:

$a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{13}a_{31} \leq -2 \cdot (a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{13}a_{31})$,

care e adevărată datorită relației (4).

Detalii notare	Barem asociat
Din $A^2 = O_3 \Rightarrow a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} = 0$ (1), $a_{22}^2 + a_{21}a_{12} + a_{23}a_{32} = 0$ (2) și $a_{33}^2 + a_{13}a_{31} + a_{32}a_{23} = 0$ (3)	3p
Din relațiile (1),(2),(3)$\Rightarrow a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{13}a_{31} \leq 0$ (4)	3p
Ajunge la relaţia: $a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{13}a_{31} \leq -2 \cdot (a_{12}a_{21} + a_{32}a_{23} + a_{13}a_{31})$, care e adevărată datorită relației (4)	1p

Subiectul 2. Să se arate că funcția $f:\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2)\to\mathbb{R}, f(x)=tg\frac{\pi}{2x}$ nu are limită în punctul $x_0=1$.

Soluţie:
Din teorema lui Heine, funcția f nu are limită în punctul $x_0=1$ dacă există două șiruri $(x_n)_{n\geq1}$,$(y_n)_{n\geq1}$ astfel încât $x_n\to1, y_n\to1$ și $f(x_n)\to L_1, f(y_n)\to L_2$ cu $L_1\neq L_2$.
Fie $x_n=\frac{n}{n+1}\to1$ și $f(x_n)=tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)=-ctg\frac{\pi}{2n}\to-\infty$.
Fie $y_n=\frac{\pi}{2\cdot arctgn}\to1$, iar $f(y_n)=tg\frac{\pi}{2y_n}=tg(arctgn)=n\to\infty$.

Detalii notare	**Barem asociat**
Funcția f nu are limită în punctul $x_0=1$ dacă există două șiruri $(x_n)_{n\geq1}$,$(y_n)_{n\geq1}$ astfel încât $x_n\to1, y_n\to1$ și $f(x_n)\to L_1, f(y_n)\to L_2$ cu $L_1\neq L_2$	2p
Fie $x_n=\frac{n}{n+1}\to1$ și $f(x_n)=tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)=-ctg\frac{\pi}{2n}\to-\infty$	2p
Fie $y_n=\frac{\pi}{2\cdot arctgn}\to1$	2p
$f(y_n)=tg\frac{\pi}{2y_n}=tg(arctgn)=n\to\infty$	1p

Subiectul 3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $tr(A) \neq 0$ și $det(A^2 + (detA + x)I_2) \geq 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Arătați că $4det(A) \geq (trA)^2$.

Soluție:

Din $A^2 - trA \cdot A + detA \cdot I_2 = O_2$, avem $det(A^2 + (detA + x)I_2) = det(trA \cdot A + xI_2)$.

Dar $det(trA \cdot A + xI_2) = x^2 + (trA)^2 \cdot x + (trA)^2 \cdot detA$.

Relația din enunț este echivalentă cu $x^2 + (trA)^2 \cdot x + (trA)^2 \cdot detA \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$, de unde obținem că $\Delta = (trA)^4 - 4(trA)^2 \cdot detA \leq 0$.

Detalii notare	Barem asociat
Scrie relaţia $A^2 - trA \cdot A + detA \cdot I_2 = O_2$	1p
Arată că $det(A^2 + (detA + x)I_2) = det(trA \cdot A + xI_2)$	1p
Dar $det(trA \cdot A + xI_2) = x^2 + (trA)^2 \cdot x + (trA)^2 \cdot detA$	2p
Relația din enunț este echivalentă cu $x^2 + (trA)^2 \cdot x + (trA)^2 \cdot detA \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$	1p
Obține că $\Delta = (trA)^4 - 4(trA)^2 \cdot detA \leq 0$	1p
Finalizare	1p

Subiectul 4. Se dă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+x_n+1}}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_n$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot x_n$.

Soluţie:

$x_n > 0, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{x_n^2+x_n+1}} < 1 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ descrescător.

Trecem la limită în relaţia de recurenţă şi $\Rightarrow x_n \to 0$.

Fie $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{x_n}}$. Atunci $L^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$ şi folosind teorema Stolz-Cesaro se obţine $L^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{x_n^2+x_n+1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n^2+x_n} = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+x_n+1}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x_n^2+x_n+1}+1}{x_n+1} = 2.$$

Detalii notare	**Barem asociat**
$x_n > 0,\ \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{x_n^2+x_n+1}} < 1 \Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ descrescător	1p
Trece la limită în relaţia de recurenţă şi $\Rightarrow x_n \to 0$	1p
Fie $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{x_n}}$. Atunci $L^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$ şi folosind teorema Stolz-Cesaro obţine $L^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{x_n^2+x_n+1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n^2+x_n} = 0$	3p
$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+x_n+1}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x_n^2+x_n+1}+1}{x_n+1} = 2$	2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017–

CLASA A XII-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Calculaţi: $I = \int_0^{\pi} \frac{(x+1)sinx}{2-sin^2x} dx$.

Soluţie:

$I = \int_0^{\pi} \frac{(x+1)sinx}{2-sin^2x} dx = I_1 + I_2$, unde $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{xsinx}{2-sin^2x} dx$ şi $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{sinx}{2-sin^2x} dx$.

Avem: $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{xsinx}{2-sin^2x} dx = -\int_0^{\pi} (\pi - x - \pi) \frac{sin(\pi-x)}{2-sin^2(\pi-x)} dx$ =

$= -\int_0^{\pi} (\pi - x) \frac{sin(\pi-x)}{2-sin^2(\pi-x)} dx + \pi \int_0^{\pi} \frac{sin(\pi-x)}{2-sin^2(\pi-x)} dx = -\int_0^{\pi} t \frac{sint\, dt}{2-sin^2t} + \pi \int_0^{\pi} \frac{sinx}{2-sin^2x} dx = -I_1 + \pi I_2.$

Deci $I_1 = \frac{\pi}{2} I_2,$

Dar $I_2 = -\int_0^{\pi} \frac{(cosx)' dx}{1+cos^2x} = -arctg(\cos x) \Big|_0^{\pi} = -arctg(-1) + arctg(1) = \frac{\pi}{2}$.

Deci, $I = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$.

Detalii notare	**Barem asociat**
Descompune integrala iniţiala în $I = I_1 + I_2$, unde $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{xsinx}{2-sin^2x} dx$ şi $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{sinx}{2-sin^2x} dx$	1 p
Obţine $I_1 = -I_1 + \pi I_2$, de unde $I_1 = \frac{\pi}{2} I_2$	3 p
Calculează $I_2 = \frac{\pi}{2}$	2 p
Finalizează $I = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$	1 p

Subiectul 2. Determinaţi funcţia f : ℝ → ℝ care admite primitive şi verifică, pentru orice număr real x, egalitatea $f(x) - F(x) = |x-1|$, unde F : ℝ → ℝ este o primitiva a lui f.

Soluţie:

Înmulţind egalitatea dată cu e^{-x} obţinem $f(x)e^{-x} - F(x)e^{-x} = |x-1|e^{-x}$, care se mai poate scrie $(F(x)e^{-x})' = \begin{cases} (-x+1)e^{-x}, x<1 \\ (x-1)e^{-x}, x \geq 1 \end{cases}$

Integrând, ajungem la $F(x)e^{-x} = \begin{cases} xe^{-x} + c_1, x<1 \\ -xe^{-x} + c_2, x \geq 1 \end{cases}$.

Condiţia de continuitate este: $c_2 = \frac{2}{e} + c_1$.

Obţinem: $F(x) = \begin{cases} x + ce^x, x<1 \\ -x + \left(\frac{2}{e} + c\right)e^x, x \geq 1 \end{cases}$, care prin derivare conduce la

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ce^x, x<1 \\ -1 + \left(\frac{2}{e} + c\right)e^x, x \geq 1 \end{cases}$$

Detalii notare	**Barem asociat**
Înmulţeşte relaţia dată cu e^{-x}	1 p
Observă că $(F(x)e^{-x})' = \begin{cases} (-x+1)e^{-x}, x<1 \\ (x-1)e^{-x}, x \geq 1 \end{cases}$	2 p
Integrează şi obţine $F(x)e^{-x} = \begin{cases} xe^{-x} + c_1, x<1 \\ -xe^{-x} + c_2, x \geq 1 \end{cases}$	1 p
Condiţia de continuitate este $c_2 = \frac{2}{e} + c_1$	1p
Obţine $F(x) = \begin{cases} x + ce^x, x<1 \\ -x + \left(\frac{2}{e} + c\right)e^x, x \geq 1 \end{cases}$,	1 p
care prin derivare conduce la $f(x) = \begin{cases} 1 + ce^x, x<1 \\ -1 + \left(\frac{2}{e} + c\right)e^x, x \geq 1 \end{cases}$	1p

Subiectul 3. Fie (G,·) un grup cu $2n+1$ elemente cu proprietatea că există o funcţie

$f: G \to G$ cu proprietetea că: $f\,(x\,f\,(xy)) = y\,f\,(x^2),\ \forall\, x, y \in G$.

Să se arate că G este grup abelian.

Soluţie:

Pentru x = e obţinem $f(f\,(y)) = y\,f\,(e),\ \forall\, y \in G$. Vom demonstra că f este injectivă.

Fie $y_1, y_2 \in G$ cu $f(y_1) = f(y_2)$ de unde $f(f(y_1)) = f(f(y_2))$, deci $y_1f(e) = y_2f(e)$ în (G,·), care este grup, din care se obtine $y_1 = y_2$, deci f este injectiva.

Pentru y = e în relaţia din enunţ, rezultă că $f(x\,f(x)) = f(x^2)$, iar din injectivitatea lui f obţinem $x\,f(x) = x^2$, deci $f(x) = x,\ \forall\, x \in G$.

În aceste condiţii, egalitatea din ipoteza devine $x^2y = y\,x^2,\ \forall\, x, y \in G$. Pentru $x \to x^{n+1}$ se obţine: $x^{2n+2}y = y\,x^{2n+2},\ \forall\, x, y \in G$ şi cum $x^{2n+1} = e$, obţinem $x\,y = y\,x,\ \forall\, x, y \in G$.

Detalii notare	Barem asociat
Înlocuieşte x = e şi obţine $(x\,(f\,(y)) = y\,f\,(e),\ \forall\, y \in G$	1p
Demonstrează că f este injectivă	1p
Înlocuieşte y = e şi obţine $f(x\,f(x)) = f(x^2)$	1p
Deduce că $f(x) = x$ pentru $\forall\, x \in G$	1p
Obţine $x^2y = y\,x^2,\ \forall\, x, y \in G$	1p
Deduce $x^{2n+2}y = y\,x^{2n+2},\ \forall\, x, y \in G$ şi foloseşte că $x^{2n+1} = e,\ \forall\, x \in G$	1p
Finalizare $x\,y = y\,x,\ \forall\, x, y \in G$	1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: *inf_arad@isjarad.ro*

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Subiectul 4. a) Fie $(G,\bullet)$ un grup comutativ cu 2015 elemente, iar e elementul său neutru.

Să se arate că dacă $x \in G$ și $x^2 = e$, atunci $x = e$.

b) Fie $(G,*)$ și $(G',\circ)$ două grupuri cu 2016 respectiv 2015 elemente.

Să se determine toate morfismele de grup de la G la G′.

Soluţie:

a) Dacă $x \neq e$, atunci $\mathrm{ord}(x) = 2$, dar $|G| = 2015 \Rightarrow 2 | 2015$ contradicție $\Rightarrow x = e$.

b) Fie e elementul neutru al lui G și e' elementul neutru al lui G'

Dacă $f: G \to G'$ morfism de grupuri, atunci $\underbrace{f(x) \circ f(x) \circ \ldots \circ f(x)}_{2015 \text{ ori}} = e'$.

$$\Rightarrow e' = f(e) = f(\underbrace{x * x * \ldots * x}_{2016 \text{ ori}}) = \underbrace{f(x) \circ f(x) \circ \ldots \circ f(x)}_{2016 \text{ ori}}$$

$\Rightarrow e' = e' \circ f(x) \Rightarrow f(x) = e'$.

Detalii notare	Barem asociat
a) Observă că dacă $x \neq e$, atunci $\mathrm{ord}(x)=2$	2p
Dar $\lvert G \rvert=2015 \Rightarrow 2 \mid 2015$ contradicție $\Rightarrow x=e$	2p
b) Deduce că dacă $f: G \to G'$ morfism de grupuri, atunci $\underbrace{f(x) \circ f(x) \circ \ldots \circ f(x)}_{2015 \text{ ori}} = e'$	1p
$e' = f(e) = f(\underbrace{x * x * \ldots * x}_{2016 \text{ ori}}) = \underbrace{f(x) \circ f(x) \circ \ldots \circ f(x)}_{2016 \text{ ori}}$	1p
$e' = e' \circ f(x) \Rightarrow f(x) = e'$	1p