INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017–

CLASA A V-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Fie numărul $a = 12345678910...999$, unde cifrele sunt obținute scriind numerele naturale de la 1 la 999. Care este a 2017-a cifră?

Soluţie:

$1,2,3,...,9 \rightarrow 9\ cifre$

$10,11,12,...,99 \rightarrow (99-9)\cdot 2 = 180\,(cifre)$

$\Rightarrow$ mai avem nevoie de $2017-(9+180)=1828$ (cifre).

Dar $1828 = 3\cdot 609+1$

$100,101,102,...,708 \rightarrow 708-99=609$ (numere de trei cifre)

Cifra căutată este prima cifră a lui 709, adică 7.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$1,2,3,...,9 \rightarrow 9\ cifre$	1p
$10,11,12,...,99 \rightarrow (99-9)\cdot 2 = 180\,(cifre)$	1p
Observă că mai avem nevoie de $2017-(9+180)=1828$ (cifre)	1p
$1828 = 3\cdot 609+1$	1p
$100,101,102,...,708 \rightarrow 708-99=609$ (numere de trei cifre)	2p
Deduce că cifra căutată este prima cifră a lui 709, adică 7	1p

Subiectul 2. a) Să se afle restul împărțirii numărului $a=2017+2(1+2+...+2016)$ la 2016.

b) Să se arate că suma primelor 2017 numere impare este pătrat perfect.

c) Să se scrie numărul 2017^2 ca suma a 2017 numere naturale consecutive.

Soluție: a) Fie $A=1+2+...+2016=\left[(1+2016)\cdot 2016\right]:2=2017\cdot 1008$

$\Rightarrow a=2017+2017\cdot 2016=2017(1+2016)=2017^2$

$a=(2016+1)^2=M_{2016}+1^2=M_{2016}+1$.

În concluzie, restul împărțirii lui a la 2016 este 1.

b) $B=1+3+5+...+x$, $1=2\cdot 1-1, 3=2\cdot 2-1,..., x=2\cdot 2017-1=4033$

$B=\left[(1+4033)\cdot 2017\right]:2=2017\cdot 2017=2017^2 \Rightarrow$ B este pătrat perfect.

c) Notăm numerele cu $a, a+1, a+2,...a+2016$.

$a+(a+1)+(a+2)+...+(a+2016)=2017^2$

$2017a+(1+2+...+2016)=2017^2 \Rightarrow 2017a+\left[(1+2016)\cdot 2016\right]:2=2017^2$

$2017a+2017\cdot 1008=2017^2 \,|:2017 \quad \Rightarrow a+1008=2017 \Rightarrow a=1009$

$\Rightarrow 2017^2=1009+1010+1011+...+3025$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A=1+2+...+2016=\left[(1+2016)\cdot 2016\right]:2=2017\cdot 1008$	1p
$\Rightarrow a=2017+2017\cdot 2016=2017(1+2016)=2017^2$	1p
$a=(2016+1)^2=M_{2016}+1^2=M_{2016}+1$	1p
Deduce că restul împărțirii lui a la 2016 este 1..	0,5p
b) $B=1+3+5+...+x$, $1=2\cdot 1-1, 3=2\cdot 2-1,..., x=2\cdot 2017-1=4033$	0,5p
$B=\left[(1+4033)\cdot 2017\right]:2=2017\cdot 2017=2017^2 \Rightarrow$ B este pătrat perfect	1p
c) $a+(a+1)+(a+2)+...+(a+2016)=2017^2$	0,5p
$2017a+2017\cdot 1008=2017^2 \,|:2017 \quad \Rightarrow a+1008=2017 \Rightarrow a=1009$	1p
$\Rightarrow 2017^2=1009+1010+1011+...+3025$	0,5p

Subiectul 3. Ștefan va împlini x ani în anul x^2. Care este anul de naștere al lui Ștefan, dacă se știe că s-a născut în secolul XX?

Soluţie:

Anul nașterii lui Ștefan este $x^2 - x$ și $1901 \le x^2 - x \le 2000$

$43^2 = 1849 < 1900; 44^2 = 1936; 45^2 = 2025; 46^2 = 2116$

$44^2 - 44 = 1936 - 44 = 1892 < 1900$ nu convine

$45^2 - 45 = 2025 - 45 = 1980; 1900 < 1980 < 2000$ convine

$46^2 - 46 = 2116 - 46 = 2070 > 2000$ nu convine

Concluzie: Ștefan s-a născut în anul 1980.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Deduce că anul nașterii lui Ștefan este $x^2 - x$ și $1901 \le x^2 - x \le 2000$	2p
Observă că $43^2 = 1849 < 1900; 44^2 = 1936; 45^2 = 2025; 46^2 = 2116$	1p
Observă că $44^2 - 44 = 1936 - 44 = 1892 < 1900$ nu convine....................................	1p
Observă că $45^2 - 45 = 2025 - 45 = 1980; 1900 < 1980 < 2000$ convine.......................	1p
Observă că $46^2 - 46 = 2116 - 46 = 2070 > 2000$ nu convine.......................................	1p
Concluzionează că Ștefan s-a născut în anul 1980...	1p

Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: *inf_arad@isjarad.ro*

Subiectul 4. Câte numere de forma $\overline{abc}$ cu a, b, c cifre distincte există, dacă :

$\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc}$ +a+b+c =2016

Soluţie:

$\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc}$ + a + b + c = 2016

Descompunem : 100a +10a+a+100b+10b+b+100c+10c+c+a+b+c= 2016

112a + 112b +112c = 2016

112(a+b+c) = 2016

a+b+c = 18

Cum a, b, c sunt cifre distincte şi nenule avem posibilităţile : 9+8+1=18, 9+7+2=18, 9+6+3=18, 9+5+4=18, 8+7+3=18, 8+6+4=18, 7+6+5=18. Pentru fiecare avem 6 cazuri, deci în total sunt 7·6 =42 numere.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Descompune şi ajunge la forma :112a + 112b +112c = 2016......................................	3p
Găseşte a+b+c = 18	1p
Găseşte toate sumele..	2p
Definitivează, găsind cele 42 posibilităţi...	1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017 –

CLASA A VI-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Numărul $\overline{aaa8}$ împărțit la un număr de două cifre dă restul 98. Aflați numărul.

Soluție:
Deoarece restul este mai mic decât împărțitorul și împărțitorul are două cifre, deducem că împărțitorul este 99. Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem $\overline{aaa8} = 99 \cdot c + 98$. Adunând 1 în fiecare parte a egalității avem $\overline{aaa9} = 99 \cdot c + 99 = 99 \cdot (c+1)$.
De aici deducem că $11 \mid \overline{aaa9} = a \cdot 1100 + \overline{a9}$. Cum $11 \mid a \cdot 1100 \Longrightarrow 11 \mid \overline{a9}$, de unde avem $a = 9$. Numărul căutat este 9998.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Deduce împărțitorul 99 ……………...………………………...………………….….	1p
Aplică teorema împărțirii cu rest și obține $\overline{aaa8} = 99 \cdot c + 98$……..……………….	1p
Adună 1 în fiecare parte a egalității și obține $\overline{aaa9} = 99 \cdot c + 99 = 99 \cdot (c+1)$ ….	1p
Deduce $11 \mid \overline{aaa9} = a \cdot 1100 + \overline{a9}$ și $11 \mid \overline{a9}$…………………...…………….......	2p
Determină $a = 9$ ………………………………….. …..	1p
Precizează numărul căutat 9998 ....…………………………………………………...	1p

Subiectul 2. Fie numerele $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}$ şi $b=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{1996}{1997}$.

a) Arătaţi că $a<b$. b) Determinaţi media aritmetică a numerelor a şi b.

c) Demonstraţi că $a<999$ şi $b>999$.

Soluţie:

a) Fiecare din cele două numere este format din câte o sumă ce conţine 1997 termeni. Comparând termenii celor două sume astfel: primul cu primul, al doilea cu al doilea, ... şi ultimul cu ultimul obţinem $1=1$, $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}<\frac{3}{4}$, ... $\frac{1}{1997}<\frac{1996}{1997}$.

Observăm că primii doi termeni ai celor două sume sunt egali, iar începând cu al treilea fiecare termen al primei sume este mai mic decât termenul corespunzător al celei de a doua. Prin însumare, membru cu membru, obţinem

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}<1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{1996}{1997} \Leftrightarrow a<b.$$

b) $$m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}+1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{1996}{1997}}{2}=$$

$$=\frac{(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{1997}+\frac{1996}{1997}\right)}{2}=\frac{2+\overbrace{1+1+1+...+1}^{de 1996 ori}}{2}=\frac{1998}{2}=999.$$

c) Din $a<b$ prin adunarea lui a în fiecare membru a inegalităţii obţinem $2a<a+b$. Împărţind la 2 ultima inegalitate avem $a<\frac{a+b}{2}=999$.

Din $a<b$ prin adunarea lui b în fiecare membru a inegalităţii obţinem $a+b<2b$. Împărţind la 2 ultima inegalitate avem $\frac{a+b}{2}<b \Leftrightarrow b>999$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Observă că primii doi termeni ai celor două sume sunt egali, iar începând cu al treilea fiecare termen al primei sume este mai mic decât termenul corespunzător al celei de a doua	1p
Prin însumare, membru cu membru, obţinem $a<b$	1p
b) Precizează că $m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{1997}+\frac{1996}{1997}\right)}{2}$	2p
Deduce că $m_a=999$	1p
c) Argumentează că $a<\frac{a+b}{2}=999$	1p
Argumentează că $\frac{a+b}{2}<b \Leftrightarrow b>999$	1p

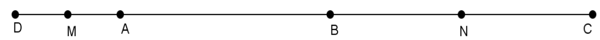
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Subiectul 3. Punctele A, B, C, D aparțin dreptei d, astfel încât $3\cdot AB = 2\cdot BC$, $AB + BC = 15cm$, iar $[BC] \equiv [BD]$.Calculați distanța dintre mijlocul segmentului $[AD]$ și mijlocul segmentului$[BC]$.

Soluție:

Avem $AB + BC = 15cm \;\big|\cdot 2 \Leftrightarrow 2AB + 2BC = 30cm$, (1). Cum $3\cdot AB = 2\cdot BC$, relația (1) devine $2AB + 3AB = 30 \Leftrightarrow 5AB = 30 \Leftrightarrow AB = 6cm$. De unde $BC = 9cm$.

Cazul I Ordinea punctelor $D - A - B - C$

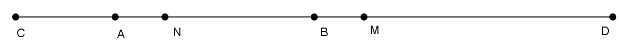


Avem $AD = BD - AB = 9cm - 6cm = 3cm$.

Fie $M \in [AD], AM = MD = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{3}{2} = 1,5cm$ și $N \in [BC]$, $BN = NC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{9}{2} = 4,5cm$.

$MN = MA + AB + BN = 1,5cm + 6cm + 4,5cm = 12cm$

Cazul II Ordinea punctelor $C - A - B - D$



Avem $AD = AB + BD = 6cm + 9cm = 15cm$.

Fie $M \in [AD], AM = MD = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{15}{2} = 7,5cm$ și $N \in [BC]$, $BN = NC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{9}{2} = 4,5cm.$

Din $BC = BD = 9cm$ avem $AC = BC - AB = 9cm - 6cm = 3cm,$

$AN = NC - AC = 4,5cm - 3cm = 1,5cm$ si $MN = AM - AN = 7,5cm - 1,5cm = 6cm.$

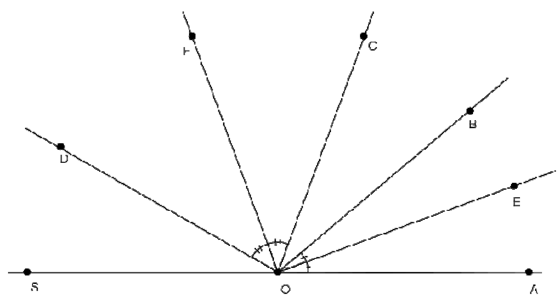
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Determină $AB = 6cm$ și $BC = 9cm$ ……………………………………………..	1p
Cazul I Ordinea punctelor $D - A - B - C$ și figura corespunzătoare …………….	1p
Definește $M \in [AD], AM = MD = 1,5cm$ și $N \in [BC]$, $BN = NC = 4,5cm$ ……..	1p
Determină $MN = MA + AB + BN = 12cm$ …………………………………………	1p
Cazul II Ordinea punctelor $C - A - B - D$ și figura corespunzătoare ……………	1p
Definește $M \in [AD], AM = MD = 7,5cm$ și $N \in [BC]$, $BN = NC = 4,5cm$ ……..	1p
Determină $MN = AM - AN = 6cm$ ………………………………………………..	1p

Subiectul 4. Fie semidreptele $[OA$,$[OB$,$[OC$ și $[OD$, astfel ca unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente, respectiv unghiurile $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ de asemenea sunt adiacente. Se consideră semidreapta $[OE$ bisectoarea $\sphericalangle AOB$, semidreapta $[OF$ bisectoarea $\sphericalangle COD$ și semidreapta $[OS$ în prelungirea semidreptei $[OA$. Știind că unghiurile $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt suplementare:

a) determinați măsura $\sphericalangle$EOF;

b) demonstrați că unghiurile $\sphericalangle DOS$ și $\sphericalangle BOC$ sunt congruente.

Soluție:



a) Din $[OE$ bisectoarea $\sphericalangle AOB$ avem

$$m(\sphericalangle AOE) = m(\sphericalangle EOB) = \frac{m(\sphericalangle AOB)}{2} = x$$
$$\Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 2x.$$

Din $[OF$ bisectoarea $\sphericalangle COD$ avem

$$m(\sphericalangle COF) = m(\sphericalangle FOD) = \frac{m(\sphericalangle COD)}{2} = y$$
$$\Rightarrow m(\sphericalangle COD) = 2y.$$

Cum $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$ sunt suplementare avem:

$$m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOD) = 180^0 \Leftrightarrow m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^0$$

$$\Leftrightarrow m(\sphericalangle AOB) + 2m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^0 \Leftrightarrow 2x + 2m(\sphericalangle BOC) + 2y = 180^0 |:2$$
$$\Leftrightarrow x + m(\sphericalangle BOC) + y = 90^0 \Leftrightarrow m(\sphericalangle EOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COF) = 90^0.$$

Cum $m(\sphericalangle EOF) = m(\sphericalangle EOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COF)$ avem $m(\sphericalangle EOF) = 90^0$.

b) Avem [OS și [OA semidrepte opuse de unde

$$m(\sphericalangle AOS) = 180^0 \Leftrightarrow m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle DOS) = 180^0, (1).$$

Din a) avem $m(\sphericalangle AOB) + 2m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^0$, (2). Scăzând membru cu membru cele două egalități obținem $m(\sphericalangle DOS) - m(\sphericalangle BOC) = 0^0$ de unde avem $m(\sphericalangle DOS) = m(\sphericalangle BOC)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Figura corespunzătoare problemei..	1p
Deduce relația $m(\sphericalangle AOB) + 2m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^0$.....................	2p
Argumentează că $m(\sphericalangle EOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COF) = 90^0$....................	1p
Precizează că $m(\sphericalangle EOF) = 90^0$...	1p
b) Scrie relația $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle DOS) = 180^0$, (1) și $m(\sphericalangle AOB) + 2m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^0$, (2)	1p
Argumentează că $m(\sphericalangle DOS) = m(\sphericalangle BOC)$și precizează că$\sphericalangle DOS \equiv \sphericalangle BOC$........	1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017–

CLASA A VII-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Arătați că numărul:
$$p=n\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$ este natural, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție:
$$p=n\cdot\left[\left({}^{2)}1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left({}^{3)}1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left({}^{n)}1+\frac{1}{n}\right)-\left({}^{2)}1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left({}^{3)}1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left({}^{n)}1-\frac{1}{n}\right)\right]=$$
$$=n\cdot\left[\left(\frac{2+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3+1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)-\left(\frac{2-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3-1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$
$$=n\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)}{n}\right)$$
$$=n\cdot\left(\frac{{}^{n)}n+1}{2}-\frac{{}^{2)}1}{n}\right)=n\cdot\frac{n\cdot(n+1)-2}{2n}=\frac{n\cdot(n+1)-2}{2}$$

Cum $n\in\mathbb{N}^*$ avem n și $n+1$ numere consecutive. Știm că produsul a două numere consecutive este divizibil cu 2 de unde rezultă $n\cdot(n+1)\,\vdots\,2$ și cum $2\,\vdots\,2$ avem $n\cdot(n+1)-2\,\vdots\,2$.

Deducem că $p=\frac{n\cdot(n+1)-2}{2}\in\mathbb{N}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Deduce $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2}$ ………………………..	2p
Deduce $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)}{n}=\frac{1}{n}$ ………………………....	2p
Calculează $p=\frac{n\cdot(n+1)-2}{2}$ …………………………...………………………	1p
Argumentează că $n\cdot(n+1)-2\,\vdots\,2$ ……………………………………………....	1p
Precizează că $p=\frac{n\cdot(n+1)-2}{2}\in\mathbb{N}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$…………………………..	1p

Subiectul 2. Să se arate că dacă numerele strict pozitive $a, b, c \in \mathbb{Q}$ verifică relația $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$, atunci:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c}+\frac{b+c}{b+2c+3a}+\frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbb{Q}$.

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)}+\frac{bc}{a(2b-c)}+\frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Soluție:

Din $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2a=b+c \\ 2b=a+c \\ 2c=a+b \end{cases}$. Se deduce că $a=b=c$. Avem că:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c}+\frac{b+c}{b+2c+3a}+\frac{c+a}{c+2a+3b}}=\sqrt{\frac{2a}{6a}+\frac{2a}{6a}+\frac{2a}{6a}}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{3}}=1 \in \mathbb{Q}$.

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)}+\frac{bc}{a(2b-c)}+\frac{ca}{b(2c-a)}}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}}=\sqrt{3} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

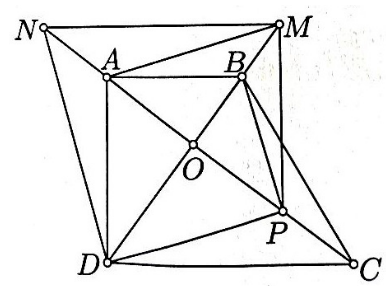
Detalii rezolvare	Barem asociat
Deduce că $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$	2p
Precizează că $2a=b+c$, $2b=a+c$, $2c=a+b$ și deduce că $a=b=c$ ……………..	1p
Argumentează că $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c}+\frac{b+c}{b+2c+3a}+\frac{c+a}{c+2a+3b}}=\sqrt{\frac{2a}{6a}+\frac{2a}{6a}+\frac{2a}{6a}}=1 \in \mathbb{Q}$	2p
Argumentează că $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)}+\frac{bc}{a(2b-c)}+\frac{ca}{b(2c-a)}}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}}=\sqrt{3} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	2p

Subiectul 3. Fie $ABCD$ trapez dreptunghic, cu $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0, AB < CD$ și $AC \perp BD$. Punctele M și N sunt simetricele punctelor D și C față de punctul de intersecție a diagonalelor, iar $MP \perp DC$, $P \in AC$.

a) Arătați că $MADP$ este romb;

b) Demonstrați că $AM \perp ND$ și $BP \perp DP$.

Soluție:



a) Din $MP \perp DC$ și $AD \perp DC$ rezultă $AD \| MP$ și atunci $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle PMD$, (1), ca unghiuri alterne interne.

Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Din ipoteză avem $DM \perp AP \Rightarrow$ $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle POM) = 90^0$, (2). Cum punctul M este simetricul punctului D față de punctul O avem $[DO] \equiv [OM]$, (3). Din (1), (2) și (3) avem $\Delta AOD \equiv \Delta POM$ (CU) de unde rezultă că $[AO] \equiv [PO]$, (4). Din (3) și (4) avem $MADP$ paralelogram și datorită faptului că $DM \perp AP$, $MADP$ romb.

b) Punctul N este simetricul punctului C față de punctul O de unde avem $[NO] \equiv [OC]$ (5). Din (3) și (5) avem $DCMN$ paralelogram de unde avem $MN \| DC$.

În ΔDMN avem NO înălțime din ipoteză, iar AD înălțime deoarece

$\left.\begin{matrix} AD \perp DC \\ DC \| MN \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \perp MN$ Cum $NO \cap AD = \{A\}$ avem A ortocentrul ΔDMN, rezultă MA este înălțime, de unde $MA \perp ND$.

Din $MADP$ romb avem $[AD] \equiv [DP] \Rightarrow \Delta ADP$ isoscel și atunci $m(\sphericalangle DAP) =$ $m(\sphericalangle DPA)$, (6).Cum MD este mediatoarea $[AP]$ și $B \in MD$ avem $[BA] \equiv [BP] \Rightarrow \Delta BAP$ isoscel și atunci $m(\sphericalangle BAP) = m(\sphericalangle BPA)$, (7). Folosind (6) și (7) avem:

$m(\sphericalangle DPB) = m(\sphericalangle DPA) + m(\sphericalangle BPA) = m(\sphericalangle DAP) + m(\sphericalangle PAB) = m(\sphericalangle DAB) = 90^0$.

De aici concluzia $BP \perp DP$.

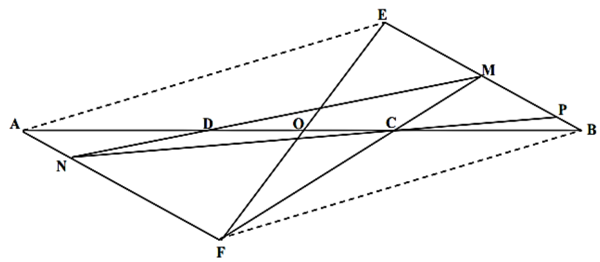
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Realizează figura corespunzătoare datelor din problemă	1p
a) Argumentează că $MADP$ paralelogram	1p
Deduce că $MADP$ este romb	1p
b) Argumentează că AD înălțime în ΔDMN	1p
Precizează că A este ortocentrul ΔDMN de unde MA este înălțime, adică $MA \perp ND$	1p
Demonstrează că $m(\sphericalangle DAP) = m(\sphericalangle DPA)$ și $m(\sphericalangle BAP) = m(\sphericalangle BPA)$	1p
Argumentează că $m(\sphericalangle DAB) = 90^0$ de unde avem $BP \perp DP$	1p

Subiectul 4. Punctele A, D, C şi B sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $[AD] \equiv [DC] \equiv [CB]$. Punctul E este exterior dreptei AB, O este mijlocul segmentului $[AB]$, iar F este simetricul punctului E față de O. Dacă $FC \cap EB = \{M\}$, $MD \cap AF = \{N\}$ şi $NC \cap EB = \{P\}$, arătați că:

a) $EB = 8PB$;

b) $A_{AFBE} = 48A_{CPB}$.

Soluție:



a) Din O mijlocul segmentului $[AB]$ avem $[AO] \equiv [OB]$ iar din F simetricul punctului E față de punctul O avem $[EO] \equiv [OF]$ de unde deducem că $AFBE$ este paralelogram (diagonalele se înjumătățesc).

În ΔEFB avem $[BO]$ mediană, $C \in [BO]$ şi $BC = \frac{1}{3} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot 2BO = \frac{2}{3} BO$ de unde C este centru de greutate.

Din $AN \| PB$ avem $\Delta PBC \sim \Delta NAC \Rightarrow \frac{PB}{NA} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, (1).

Din $AN \| MB$ avem $\Delta AND \sim \Delta BMD \Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$, (2).

Din $[FM]$ mediană în ΔEFB avem $\frac{MB}{EB} = \frac{1}{2}$, (3).

Înmulțind relațiile (1), (2) şi (3) avem $\frac{BP}{NA} \cdot \frac{AN}{MB} \cdot \frac{MB}{EB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{BP}{EB} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow EB = 8BP$.

b) În ΔECB avem $\frac{BP}{EB} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{A_{PCB}}{A_{ECB}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow A_{PCB} = \frac{1}{8} \cdot A_{ECB}$, (4). Din C centru de greutate în ΔEFB avem $A_{ECB} = \frac{1}{3} \cdot A_{EFB}$, (5).Avem $\Delta BEF \equiv \Delta AFE$ de unde

$A_{BEF} = A_{AFE} \Rightarrow A_{BEF} = \frac{1}{2} A_{AFBE}$, (6)

Din relațiile (4), (5) şi (6) avem

$A_{PCB} = \frac{1}{8} \cdot A_{ECB} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{EFB} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A_{AFBE} \Leftrightarrow A_{PCB} = \frac{1}{48} \cdot A_{AFBE}$ de unde deducem $A_{AFBE} = 48A_{PBC}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Realizează figura corespunzătoare datelor din problemă …………………………………	1p
a) Deduce că $AFBE$ este paralelogram……………………………………………………	1p
Din $AN \parallel PB$ avem $\Delta PBC \sim \Delta NAC$ de unde obține $\frac{PB}{NA}=\frac{1}{2}$, (1). Din $AN \parallel MB$ avem $\Delta AND \sim \Delta BMD$ de unde obține $\frac{AN}{BM}=\frac{1}{2}$, (2)…………………………	1p
Din $[FM]$ mediană în ΔEFB de unde avem $\frac{MB}{EB}=\frac{1}{2}$, (3). Înmulțind relațiile (1), (2) și (3) și obține $\frac{BP}{EB}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow EB=8BP$. ……………………	1p
b) În ΔECB deduce $A_{PCB}=\frac{1}{8}\cdot A_{ECB}$, (4). …………………………………………	1p
Din C centru de greutate în ΔEFB deduce $A_{ECB}=\frac{1}{3}\cdot A_{EFB}$, (5)……………………	1p
Argumentează relația $A_{EFB}=\frac{1}{2}A_{AFBE}$ (6) și din (4), (5) și (6) deduce $A_{AFBE}=48A_{CPB}$ …………………………………………………………………………	1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017–

CLASA A VIII-A
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. **a)** Arătaţi că:

$$x=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}\right)\left(\sqrt{2017}+1\right)$$ este număr natural.

b) Să se afle x şi y astfel încât: $\sqrt{x^2-4x+4000004}+\sqrt{y^2-6y+298}=2017$

Soluţie:
a) Raţionalizând numitorii obţinem:

$$x=\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{2017}-\sqrt{2016}\right)\left(\sqrt{2017}+1\right)$$
$$x=\left(\sqrt{2017}-1\right)\left(\sqrt{2017}+1\right)=2017-1=2016$$

x = 2016, care este număr natural

b) Relaţia este echivalentă cu:

$$\sqrt{(x-2)^2+2000^2}+\sqrt{(y-3)^2+17^2}\geq 2000+17=2017$$

cu egalitate pentru x = 2 şi y = 3.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Raţionalizează numitorii..	1p
$x=\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{2017}-\sqrt{2016}\right)\left(\sqrt{2017}+1\right)$	1p
x = 2016, care este număr natural..	1p
b) $\sqrt{(x-2)^2+2000^2}+\sqrt{(y-3)^2+17^2}$	2p
$\text{m.s.}\geq 2000+17=2017$	1p
x = 2; y = 3..	1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: *inf_arad@isjarad.ro*

Subiectul 2. Determinaţi numerele reale x, y, z ştiind că $x + y + z = \frac{3}{2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$.

Soluţie:

Avem : $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2zx+2yz \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2zx+2yz = \frac{9}{4}$

$\frac{3}{4} + 2xy+2zx+2yz = \frac{9}{4}$

$xy+zx+yz = \frac{3}{4} \Rightarrow xy+zx+yz = x^2+y^2+z^2 \mid \cdot 2$

$2xy+2zy+2xz = 2x^2+2y^2+2z^2$

$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$y - z = 0 \Rightarrow y = z$

$z - x = 0 \Rightarrow z = x$

$x = y = z$, dar $x + y + z = \frac{3}{2} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Ajunge la $xy+zx+yz = \frac{3}{4}$	2p
Ajunge la $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$	2p
Ajunge la $x = y = z$	2p
Finalizează $x = y = z = \frac{1}{2}$	1p

Subiectul 3. Pe planul pătratului ABCD se ridică perpendicularele AA', BB', CC' astfel încât A', B', C' se află de aceeaşi parte a planului pătratului şi [AA']≡ [BB']≡[CC']. Să se arate că planele (AB'C) şi (A'DC') sunt paralele.

Soluţie:

AA'⊥(ABCD) , CC'⊥(ABCD) ⇒ AA' ∥ CC' , dar [AA']≡ [CC'] ⇒ AA'C'C paralelogram ⇒

AC ∥ A'C' , AC⊂ (AB'C) , A'C' ⊂ (A'DC') (1)

BB'⊥ (ABCD), CC'⊥ (ABCD) ⇒ BB' ∥ CC' , dar [BB']≡[CC'] ⇒ BB'C'C paralelogram ⇒

B'C' ∥ BC , B'C'= BC ,

Dar BC=AD, BC ∥ AD ⇒ B'C' ∥ AD, B'C' =AD ⇒ ADC'B' paralelogram ⇒

AB' ∥ C'D , AB'⊂ (AB'C), C'D⊂ (A'DC') (2)

Din (1) + (2) ⇒ (AB'C) ∥ (A'DC').

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Arată AC ∥ A'C'	2p
Demonstrează că ADC'B' paralelogram	3p
Definitivează (AB'C) ∥ (A'DC')	2p

Subiectul 4. Fie a, b, c dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic cu diagonala de $\sqrt{3}$ cm.
Să se demonstreze că: $\sqrt{a}(b+c)+\sqrt{b}(c+a)+\sqrt{c}(a+b)\le 6$.

Soluție:

Diagonala paralelipipedului este $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}$

$$A=\sqrt{a\cdot 1}(b+c)+\sqrt{b\cdot 1}(c+a)+\sqrt{c\cdot 1}(a+b)\le \frac{a+1}{2}(b+c)+\frac{b+1}{2}(c+a)+\frac{c+1}{2}(a+b)$$

$= ab+bc+ca+a+b+c.$ Folosind inegaliatea mediilor $(m_{geo}\le m_{aritm}\le m_{patratica})$

obţinem: $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2=3$ si $\dfrac{a+b+c}{3}\le\sqrt[3]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}=1\Rightarrow A\le 3+3=6$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\sqrt{a\cdot 1}\le\dfrac{a+1}{2}$ şi analoagele	2p
Obţine $A=ab+bc+ca+a+b+c$	2p
Obţine $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2=3$	1p
Obţine $\dfrac{a+b+c}{3}\le\sqrt[3]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}=1\Rightarrow a+b+c\le 3$	1p
Obţine $A\le 6$	1p