OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017 –

CLASA A IX-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $a, n \in \mathbb{N}$ au loc:

a) $|x+a| + |x-a^2| \geq a^2 + a$;

b) $|x+1| + |x+2| + \cdots + |x+n| + |x-1^2| + |x-2^2| + \cdots + |x-n^2| \geq$

$\geq \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Dacă $a_1 = 1, a_n = 2^{n-1}$, să se determine $a_k \in (0, \infty)$, $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, știind că

$$\frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \frac{a_4^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq 2^{n+1} - 4$$

3. a) Arătați că în orice triunghi ABC are loc relația $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului, iar H este ortocentrul triunghiului.

b) Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru O și care are diagonalele AC și BD perpendiculare. Dacă H_1 și H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD și ABC, arătați că $\overline{BH_2} = \overline{DH_1}$.

4. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere pozitive cu suma 1. Să se arate că:

a) $\frac{a_1 a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_2 a_3}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_n a_1}{a_n+a_1} \leq \frac{1}{2}$;

b) $\sqrt{a_1(a_2+a_3+\cdots+a_n)} + \sqrt{a_2(a_1+a_3+\cdots+a_n)} + \cdots +$
$+\sqrt{a_n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})} \leq \frac{n}{2}$.

Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017 –

CLASA A X-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Fie $a \in [-1,1]$. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} = x$. Discuție.

2. Determinați funcțiile $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ care verifică relația

$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{x}{f(x\sqrt{y})}$, $(\forall)x, y \in (0,\infty)$.

3. Aflați perechile (x, y) de numere strict pozitive pentru care $x + y \leq xy$ și

$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 \leq 2$.

4. Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se determine valoarea minimă a lui $|z|$, dacă $|z - 3i| + |z - 4| = 5$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: *inf_arad@isjarad.ro*

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017 –

CLASA A XI-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = O_3$. Să se arate că

$a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31} \leq a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2$.

2. Să se arate că funcția $f: \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1,2) \to \mathbb{R},\ f(x) = tg\,\frac{\pi}{2x}$ nu are limită în punctul $x_0 = 1$

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $tr(A) \neq 0$ și $det(A^2 + (detA + x)I_2) \geq 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

Arătați că $4det(A) \geq (trA)^2$.

4. Se dă șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+x_n+1}}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_n$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot x_n$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada M.Scaevola nr.9, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017 –

CLASA A XII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Calculaţi: $I = \int_0^{\pi} \frac{(x+1)sinx}{2-sin^2x} dx$.

2. Determinaţi funcţia f : ℝ → ℝ care admite primitive şi verifică, pentru orice număr real x , egalitatea $f(x) - F(x) = |x-1|$, unde F : ℝ → ℝ este o primitiva a lui f.

3. Fie (G,·) un grup cu $2n + 1$ elemente cu proprietatea că există o funcţie $f : G \to G$ cu proprietetea că: $f\ (x\ f\ (xy))\ =\ y\ f\ (x^2),\ \forall\ x, y \in G.$

Să se arate că G este grup abelian.

4. a) Fie (G,·) un grup comutativ cu 2015 elemente, iar e elementul său neutru. Să se arate că dacă $x \in G$ şi $x^2 = e$, atunci $x = e$.

b) Fie (G,*) şi (G′,∘) două grupuri cu 2016 respectiv 2015 elemente. Să se determine toate morfismele de grup de la G la G′.