Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

CLASA a IX-a, Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor triunghiului ascuţitunghic ABC. Pe segmentele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 se consideră punctele X, Y , respectiv Z, astfel încât

$$\frac{C_1X}{XB_1} = \frac{b\cos C}{c\cos B},\ \frac{A_1Y}{YC_1} = \frac{c\cos A}{a\cos C} \text{ şi } \frac{B_1Z}{ZA_1} = \frac{a\cos B}{b\cos A}.$$

Arătaţi că dreptele AX, BY şi CZ sunt concurente.

Gazeta Matematică

Soluţie. Cum $b\cos C = A_1C$ şi $c\cos B = BA_1$, deducem că $\frac{C_1X}{XB_1} = \frac{CA_1}{A_1B}$ sau $\frac{C_1X}{C_1B_1} = \frac{CA_1}{CB}$ ceea ce este echivalent cu $\frac{C_1X}{CA_1} = \frac{C_1B_1}{CB}$ (1) .... 2 puncte

Din asemănarea triunghiurilor AC_1B_1 şi ACB obţinem că $\frac{C_1B_1}{CB} = \frac{AC_1}{AC}$ de unde folosind (1) avem $\frac{C_1X}{CA_1} = \frac{AC_1}{AC}$. Cum $\angle AC_1X = \angle ACA_1$ rezultă că triunghiurile AC_1X şi ACA_1 sunt asemenea. De aici deducem $AX \perp B_1C_1$ .... 2 puncte

Pe de altă parte, tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC, de centru O, este paralelă cu B_1C_1. Atunci AX conţine punctul O. .... 2 puncte

Analog, O se află şi pe BY şi CZ, deci dreptele AX, BY şi CZ sunt concurente. .... 1 punct

Problema 2. Fie ABC un triunghi în care O şi I sunt respectiv centrul cercului circumscris şi centrul cercului înscris. Mediatoarele segmentelor IA, IB, IC se intersectează două câte două formând triunghiul $A_1B_1C_1$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}.$$

Soluţie. Fie A_1 intersecţia mediatoarelor segmentelor IB şi IC. Notăm cu D intersecţia bisectoarei AI cu cercul circumscris triunghiului ABC. Cum $\angle BID = \angle DBI$ şi $\angle CID = \angle DCI$, deducem că $DB = DI = DC$. .... 2 puncte

Atunci $A_1 = D$. Astfel A_1 aparţine cercului circumscris triunghiului ABC. Analog B_1 şi C_1 aparţin cercului circumscris triunghiului ABC. .... 2 puncte

I este ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$ .... 1 punct

Cum O este centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$, relaţia lui Sylvester conduce la $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$. .... 2 puncte

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale nenule. Notăm $S_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că:

a) Dacă p este un număr prim, $p \geq 5$, atunci S_p se divide cu p;

b) S_5 nu este pătrat perfect.

Soluţie. a) Avem $a_n = a_1 + (n-1)r$, $n \in \mathbb{N}^*$, cu $a_1 \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}$. Obţinem

$$S_p = p\left(a_1^2 + a_1(p-1)r + \frac{(p-1)(2p-1)}{6}r^2\right).$$

. . . . 2 puncte

Cum $p \geq 5$ este prim, avem $(p, 2) = 1, (p, 3) = 1$ şi deci $6|(p-1)(2p-1)$. Aşadar $p|S_p$ . . 1 punct

b) Presupunând prin absurd că S_5 este pătrat perfect, deducem, conform a), că există $y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_5 = (5y)^2$ . . . . 1 punct

Notăm $x = a_3 \in \mathbb{N}^*$. Din $S_5 = 5x^2 + 10r^2$ obţinem $x^2 + 2r^2 = 5y^2$ (1) . . . . 1 punct

Ecuaţia (1) nu este satifăcută pentru $r = 0$, deci presupunem $r > 0$. Există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = 5^n a$, cu $a \in \mathbb{N}^*$, $(a, 5) = 1$.

Atunci există $b, c \in \mathbb{N}^*$, b prim cu 5, astfel încât $r = 5^n b, y = 5^n c$. Rezultă $a^2 + 2b^2 = 5c^2$.
. . . . 1 punct

Din $a^2, b^2 \in \{5k+1|k \in \mathbb{N}\} \cup \{5k+4|k \in \mathbb{N}\}$ obţinem că $a^2 + 2b^2 \in \mathbb{N} \setminus \{5k|k \in \mathbb{N}\}$; contradicţie. Deci S_5 nu poate fi pătrat perfect. . . . . 1 punct

Problema 4. Fie a, b, c numere reale pozitive cu proprietatea $ab + bc + ca + abc = 4$. Arătaţi că

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3 \leq a + b + c.$$

Soluţie. Condiţia din enunţ poate fi scrisă $\dfrac{a}{a+2} + \dfrac{b}{b+2} + \dfrac{c}{c+2} = 1$ (1). . . . . 2 puncte

Din inegalitatea Cauchy-Schwarz avem

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{a+2}}\sqrt{a+2} + \sqrt{\frac{b}{b+2}}\sqrt{b+2} + \sqrt{\frac{c}{c+2}}\sqrt{c+1}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2}\right)(a+2+b+2+c+2),$$

de unde folosind (1) deducem $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3$. . . . . 2 puncte

Din (1) avem că $\dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{b+2} + \dfrac{1}{c+2} = 1$. . . . . 1 punct

Atunci din inegaliatea

$$(a+2+b+2+c+2)\left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}\right) \geq 9,$$

rezultă $a + b + c \geq 3$ . . . . 2 puncte