Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017
CLASA a VIII-a

Soluţii şi bareme orientative

Problema 1.
a) Fie $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m > n$, astfel încât $\sqrt{m} - \sqrt{n} = p$. Demonstraţi că m şi n sunt pătrate perfecte.
b) Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ care verifică egalitatea

$$\sqrt{\overline{abcd}} - \sqrt{\overline{acd}} = \overline{bb}.$$

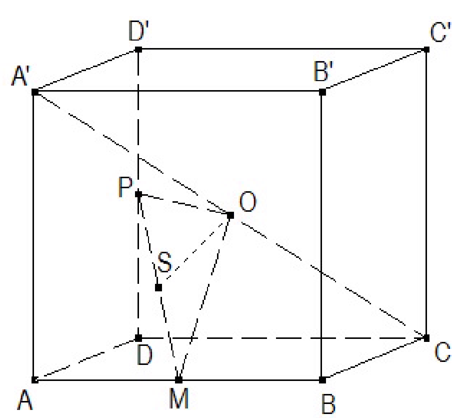
Soluţie şi barem.
a) Avem $m = p^2 + 2p\sqrt{n} + n$, deci $\sqrt{n}$ este raţional, ceea ce conduce la concluzia că n este pătrat perfect. Apoi obţinem $\sqrt{m} \in \mathbb{N}$, deci şi m este pătrat perfect. **2p**

b) Conform punctului anterior, $\overline{abcd}$ şi $\overline{acd}$ sunt pătrate perfecte. Deoarece $\overline{bb} \vdots 11$, deducem că $\overline{abcd} - \overline{acd} \vdots 11$, adică $100\left(\overline{ab} - a\right) \vdots 11$. Obţinem $9a + b \vdots 11$. **2p**

Atunci $(a; b) \in \{(1;2), (2;4), (3;6), (4;8), (6;1), (7;3); (8;5); (9,7)\}$. Analiza tuturor situaţiilor conduce la concluzia $\overline{abcd} = 1296$. **3p**

Problema 2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură a. Notăm cu M şi P mijloacele muchiilor $[AB]$, respectiv $[DD']$.
a) Demonstraţi că $MP \perp A'C$;
b) Calculaţi distanţa dintre dreptele MP şi $A'C$.

Soluţie şi barem. Fie O mijlocul lui $[A'C]$.



a) Deoarece triunghiul $MA'C$ este isoscel, rezultă $MO \perp A'C$. **1p**

Analog, triunghiul $PA'C$ este isoscel, deci $PO \perp A'C$. Atunci $A'C \perp (PMO)$, deci $A'C \perp MP$. **2p**

b) Fie S mijlocul lui $[MP]$. Triunghiurile $MA'C$ şi $PA'C$ sunt congruente, deci $[PO] \equiv [MO]$. Atunci $OS \perp MP$, deci OS este distanţa dintre dreptele MP şi $A'C$. **2p**

Avem $MC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ deci $MO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Apoi $MP = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Din triunghiul dreptunghic OSM, obţinem $OS = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **2p**

Problemae 3.

a) Fie $x \in [1, \infty)$. Demonstraţi că $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geq 0$.

b) Fie $a, b \in [1, \infty)$. Determinaţi minimul expresiei $ab(a + b - 10) + 8(a + b)$.

Soluţie şi barem.

a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x - 1)(x - 2)^2 \geq 0$. **2p**

b) Vom demonstra că minimul căutat este 8. ....**1p**

Deoarece $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, avem $ab(a + b - 10) + 8(a + b) \geq ab\left(2\sqrt{ab} - 10\right) + 16\sqrt{ab}$.
1p

Cu notaţia $\sqrt{ab} = x$, obţinem egalitatea $ab\left(2\sqrt{ab} - 10\right) + 16\sqrt{ab} = 2x^3 - 10x^2 + 16x$. Dar $2x^3 - 10x^2 + 16x \geq 8$, conform punctului precedent. **1p**

Egalitatea se obţine când $a = b = x \in \{1, 2\}$, adică pentru $a = b = 1$ şi $a = b = 2$. **2p**

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură 1. O furnică parcurge un drum pe feţele cubului, pornind din A şi terminând în C'. Deplasarea se realizează doar pe muchiile cubului sau pe diagonalele feţelor sale. Ştiind că drumul nu trece prin niciun punct de două ori, determinaţi lungimea maximă a unui asemenea drum.

Soluţie şi barem.

Vom demonstra că lungimea maximă este $3 + 4\sqrt{2}$. **1p**

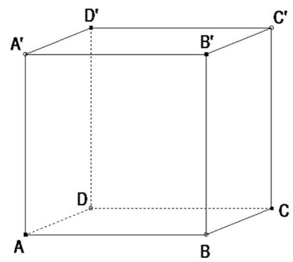
Un exemplu de traseu ar fi $A \to A' \to B \to D \to D' \to C \to B' \to C'$, cu lungimea $3 + 4\sqrt{2}$. **1p**

Deoarece sunt 8 vârfuri, furnica poate face cel mult 7 paşi, de lungime fie 1, fie $\sqrt{2}$. Un drum format din cel mult 6 paşi are lungimea maximă $6\sqrt{2}$, care este mai mică decât $3 + 4\sqrt{2}$. Deci furnica trebuie sa facă 7 paşi. **1p**

Vom demonstra că numărul maxim de paşi diagonali este 4. Pentru aceasta colorăm vărfurile A, C, B', D' cu negru, iar celelalte cu alb.

Observăm că un pas diagonal păstrează culoarea, dar un pas pe muchii schimbă culoarea. Cum, punctele A şi C' au culori diferite, deducem că furnica trebuie să parcurgă un număr impar de paşi pe muchii, deci nu putem avea un drum cu 2 paşi pe muchii şi 5 paşi diagonali. **2p**

Un eventual traseu cu 6 paşi diagonali ar conţine câte un pas pe fiecare faţă. Având doar patru puncte de aceeaşi culoare, putem avea cel mult 3 paşi diagonali consecutivi.



Primii 3 paşi ar porni din A, şi ar trece prin toate punctele negre. Ultimii paşii ar trece prin toate punctele albe şi ar încheia traseul în C'. Analizînd pe cazuri, vom observa că drumul se va autointersecta. **2p**