Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Dacă $a_1, a_2, ..., a_{2017}$ sunt numere naturale nenule, arătaţi că fracţia

$$\frac{9^{2017}-7\cdot 3^{2017}+7}{9^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_{2016}+a_{2017})(a_{2017}+a_1)}-1}$$

este reductibilă.

Soluţie. Ultima cifră a numărului 3^{2017} este 3 .... 1 punct
Ultima cifră a numărătorului este 5 .... 1 punct
$(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+...+(a_{2016}+a_{2017})+(a_{2017}+a_1)=2(a_1+a_2+...+a_{2017})$ .... 1 punct
Suma a 2017 numere naturale este pară, unul dintre termeni este par .... 1 punct
Ultima cifră a numărului $9^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_{2016}+a_{2017})(a_{2017}+a_1)}$ este 1 .... 1 punct
Numitorul se divide prin 10 .... 1 punct
Fracţia se simplifică cu 5 .... 1 punct

Problema 2. Se consideră A mulţimea tuturor numerelor naturale $\overline{abc}$, formate din trei cifre consecutive, nu neapărat în ordine.
a) Determinaţi cardinalul mulţimii A.
b) Demonstraţi că, oricum am alege câteva elemente din mulţimea A, suma acestora nu poate fi egală cu 2017.

Soluţie. a) {0,1,2} generează 4 numere .... 1 punct
Tripletele {1,2,3}, {2,3,4},..., {7,8,9} generează fiecare câte 6 numere .... 2 puncte
Cardinalul lui A este $4+7\cdot 6=46$ .... 1 punct
b) Orice număr din A este divizibil cu 3 .... 1 punct
2017 nu se divide cu 3, suma oricăror elemente din A nu poate fi 2017 .... 2 puncte

Problema 3. a) Comparaţi numerele 2^{53} şi 3^{35}.
b) Demonstraţi că, dacă $5b \geq 3a > 0$, atunci $2^{\overline{ab}} < 3^{\overline{ba}}$.

Gazeta Matematică

Soluţie. a) $3^7 > 2^{11}$ .... 2 puncte
$3^{35}=(3^7)^5 > (2^{11})^5 > 2^{53}$ .... 1 punct
b) Inegalitatea $2^{53} < 3^{35}$ se poate scrie $\left(\frac{2^{10}}{3}\right)^5 < \left(\frac{3^{10}}{2}\right)^3$. De aici $\left(\frac{2^{10}}{3}\right)^{5a} < \left(\frac{3^{10}}{2}\right)^{3a}$ .... 2 puncte
Ultima inegalitate implică $\left(\frac{2^{10}}{3}\right)^{5a} < \left(\frac{3^{10}}{2}\right)^{5b}$ sau $\left(\frac{2^{10}}{3}\right)^{a} < \left(\frac{3^{10}}{2}\right)^{b}$ adică $2^{10a+b} < 3^{10b+2}$ .... 2 puncte

Problema 4. a) Arătaţi că, într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°, cateta care se opune unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză.
b) În interiorul triunghiului ABC cu $m(\angle A)=100°$ şi $m(\angle B)=20°$ se consideră punctul D, astfel încât $m(\angle DAB)=30°$ şi $m(\angle DBA)=10°$. Determinaţi $m(\angle ACD)$.

Soluţie. a) Dacă M se află pe ipotenuza triunghiului ABC, dreptunghic în A cu $m(\angle B)=30°$ astfel încât $m(\angle BAM)=30°$, atunci triunghiul MAC este echilateral .... 2 puncte
$CA=CM=MA=MB=\frac{1}{2}BC$ .... 1 punct
b) Construim $D' \in (AD$ astfel încât $CA=CD'$, $D' \in \mathrm{Int}(ABC)$, $m(\angle ACD')=40°$, $m(\angle D'CB)=20°$. 1 punct
$CG \perp AD', G \in (AD'), D'F \perp BC, F \in (BC), \triangle CD'G \equiv \triangle CD'F\ (IU), D'G=D'F$ .... 1 punct
$D'E \perp AB, E \in (BC)$, G mijlocul lui $[AD']$, $m(\angle D'AE)=30°, D'F=D'G=D'E$, deci D' se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{B}$, $m(\angle D'BA)=10°$ .... 1 punct
$D' \in (AD$, $D' \in (BD$, $D'=D$, rezultă $m(\angle ACD)=40°$ .... 1 punct